ШКОЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»

П. Ф. Севрюков
А. Н. Смоляков

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ И МЕТОДИКА ИХ РЕШЕНИЯ

Учебно-методические материалы по математике

Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»

Учебно-методические материалы по математике

П. Ф. Севрюков
А. Н. Смоляков

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ И МЕТОДИКА ИХ РЕШЕНИЯ

Москва
Ставрополь
2005

ББК 74.262.21
С 28

Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н.

С 28 Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения : учебно-методическое пособие. — М. : Илекса, Народное образование ; Ставрополь : Сервисшкола, 2005. — 112 с. — (Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»).

ISBN 5-93078-325-X

В пособии рассматривается теоретический материал, разбирается достаточное количество примеров, предлагаются упражнения для самостоятельной работы, приводятся оригинальные способы решений отдельных уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. Ко всем упражнениям даются ответы, наиболее сложные задания сопровождаются решениями.

Отдельные части материала публиковались в журнале «Математика в школе» и приложении «Математика» к газете «Первое сентября».

Настоящее пособие предназначено для тех, кто готовится к вступительным экзаменам в вузы по математике. Оно призвано помочь школьнику и абитуриенту в изучении темы «Модули», которой в школе не уделяется достаточного внимания. Материал пособия будет полезен и учителям при подготовке к проведению факультативных занятий.

ББК 74.262.21

ISBN 5-93078-325-X

I
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ (МОДУЛЯ)

Определение. $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$.

Из определения следует, что

1) $|a| \ge 0$;
2) $|a| \ge a$;
3) $|a|^2 = a^2$;
4) $|ab| = |a||b|$;
5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;
6) $|-a| = a$, при $a \ge 0$;
7) $|-a| = |a|$.

Докажем, например, четвертое равенство. Если a и b — числа одинаковых знаков, то $ab = ab$ — верное равенство. Если a и b — числа разных знаков, например $a \ge 0$, $b \le 0$, то $-ab = -ab$ — также верное равенство. Остальные равенства и неравенства предлагаем доказать самостоятельно читателю.

Рассмотрим решение упражнений, связанных только с определением модуля числа.

Пример 1. Записать выражение $|2x - 4|$ без знака модуля.

Решение. $|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, \text{если } 2x - 4 \ge 0, \ x \ge 2 \\ 4 - 2x, \text{если } 2x - 4 < 0, \ x < 2 \end{cases}$.

Пример 2. Решить уравнение $|x^2 - 9| = 9 - x^2$.

Решение. По определению $x^2 - 9 \le 0$, поэтому все корни данного уравнения являются решением неравенства $x^2 - 9 \le 0$, откуда $-3 \le x \le 3$.

Ответ: $[-3; 3]$.

П р и м е р 3. Решить неравенство $\left|x-\frac{1}{x}\right|\geq x-\frac{1}{x}$.

Решение. Так как $|a|\geq a$ при $a\in R$, то исходное неравенство является верным при всех $x\neq 0$.

Ответ: $(-\infty; 0)\bigcup(0; +\infty)$.

П р и м е р 4. Решить неравенство $|x^2-5x+6|\leq 0$.

Решение. Поскольку $|a|\geq 0$, то $|x^2-5x+6|\geq 0$ при всех $x\in R$, а поэтому данное неравенство выполняется только при тех значениях x, при которых $x^2-5x+6=0$, откуда $x=2$ и $x=3$.

Ответ: 2; 3.

П р и м е р 5. Решить уравнение $\frac{x-2}{|x-2|}\cdot\frac{|x-1|}{x-1}=1$.

Решение. Заметим, что $x\neq 1$ и $x\neq 2$. При выполнении этих условий исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{|x-1|}{|x-2|}=\frac{x-1}{x-2}$. И так как $\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|$, то $\left|\frac{x-1}{x-2}\right|=\frac{x-1}{x-2}$. По определению модуля все корни данного уравнения находятся среди решений неравенства $\frac{x-1}{x-2}>0$. Ясно, что $x\in(-\infty; 1)\bigcup(2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 1)\bigcup(2; +\infty)$.

П р и м е р 6. Решить уравнение $|x^2-5x+6|=|x-2|\,(3-x)$.

Решение. Замечаем, что $|x^2-5x+6|=|x-2|\,|x-3|$ (см. 4-е свойство), поэтому данное уравнение равносильно уравнению $|x-2||x-3|-|x-2|\,(3-x)=0$, откуда $|x-2|=0$ или $|x-3|=3-x$. Корень первого уравнения $x=2$, а решения второго удовлетворяют неравенству $x\leq 3$.

Ответ: $(-\infty; 3]$.

П р и м е р 7. Решить уравнение $|x+2|=(x-1)\,|x|$.

Решение. Поскольку $|x+2|\geq 0$ и $|x|\geq 0$, то из условия задачи следует, что $x-1\geq 0$, то есть $x\geq 1$, но тогда $|x+2|=x+2$ и $|x|=x$.

Значит уравнение равносильно системе $\begin{cases} x \geq 1 \\ x+2 = x^2 - x \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases}$, откуда $x = 1 + \sqrt{3}$.

Ответ: $1 + \sqrt{3}$.

Пример 8. Решить неравенство $|x + 2|(x^2 + 2x - 3) < 0$.

Решение. Так как $|x + 2| \geq 0$ при $x \in R$, то в нашем случае $x \neq -2$. Исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x \neq -2 \\ x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases}$. Решение может быть показано на координатной прямой.

Ответ: $(-3; -2) \cup (-2; 1)$.

Пример 9. Решить уравнение $|x^2 - 4| = 2x - 1$.

Решение. Пусть $x^2 - 4 \geq 0$, тогда $x^2 - 4 = 2x - 1$, $x^2 - 2x - 3 = 0$; корни последнего уравнения -1 и 3. Первый из них не удовлетворяет неравенству $x^2 - 4 \geq 0$ и является посторонним для данного уравнения. Пусть $x^2 - 4 < 0$, тогда $4 - x^2 = 2x - 1$, $x^2 + 2x - 5 = 0$ и $x = -1 \pm \sqrt{6}$. Неравенству $x^2 - 4 < 0$ удовлетворяет корень $x = \sqrt{6} - 1$.

Ответ: 3; $\sqrt{6} - 1$.

Пример 10. Решить неравенство $|2x - 1| \leq 3x - 5$.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 \leq 3x - 5 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 1 - 2x \leq 3x - 5 \end{cases} \end{array}\right.$. Решением первой системы является луч $[4; +\infty)$, а вторая система решений не имеет.

Ответ: $[4; +\infty)$.

Пример 11. Решить уравнение $|2x - 6| + |2x - 4| = 2$.

Решение. Замечаем,что $|2x - 6| + |2x - 4| = -(2x - 6) + (2x - 4)$, а поэтому исходное уравнение равносильно системе неравенств $\begin{cases} 2x - 6 \leq 0 \\ 2x - 4 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 2 \end{cases}$. Ясно, что $2 \leq x \leq 3$.

Ответ: $[2; 3]$.

Упражнения.

Решить уравнения.

1. $|3x-6| = 3x-6$.

2. $|1-x^2| = x^2-1$.

3. $|x^2-2x-3| + |x+1| = 0$.

4. $(x-3)|x-2| = (x-1)^2$.

5. $|5x-6| = 2x-5$.

6. $|x^2-5x+6| = x^2-1$.

7. $\begin{cases} 2x-6\le 0 \\ 2x-4\ge 0 \end{cases}; \begin{cases} x\le 3 \\ x\ge 2 \end{cases}.$

8. $x^2-5|x|+6=0$.

9. $|x+3|-|x+5|=2$.

Решить неравенства.

10. $|x-\sqrt{x}| \ge x-\sqrt{x}$.

11. $|x-\sqrt{x}| \le -x+\sqrt{x}$.

12. $|x-\sqrt{x}| > x-\sqrt{x}$.

13. $|2x-3| \ge x+1$.

14. $x^2-2|x|-3\le 0$.

15. $|x^2-4| + |x^2-3x+2| \le 0$.

16. $\dfrac{x-1}{|x-1|}+\dfrac{x-2}{|x-2|}\ge 2$.

Если у Вас не получились какие-либо упражнения, Вы можете посмотреть на их решения. Правда, они не будут столь подробными, как в основном тексте.

Решения упражнений.

1. $|3x-6| = 3x-6 \Leftrightarrow 3x-6\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$.

Ответ: $[2;+\infty)$.

2. $|1-x^2| = x^2-1 \Leftrightarrow |x^2-1| = x^2-1 \Leftrightarrow x^2-1\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -1 \end{array}\right.$.

Ответ: $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

3. $|x^2-2x-3| + |x+1| = 0 \Leftrightarrow |(x+1)(x-3)| + |x+1| = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+1|=0 \\ |x-3|+1=0 \end{array}\right.$. Первое уравнение дает $x=-1$, а второе — корней не имеет.

Ответ: -1.

4. Так как $|x-2| \geq 0$ и $(x-1)^2 \geq 0$, то $x-3 \geq 0$ и $x \geq 3$, но тогда $|x-2| = x-2$ и $(x-3)(x-2) = (x-1)^2$, $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x + 1$, $x = 1\frac{2}{3}$, но это значение не удовлетворяет неравенству $x \geq 3$.

Ответ: корней нет.

5. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x-6\geq 0\\ 5x-6=2x-5\end{cases}\\ \begin{cases}5x-6<0\\ -5x+6=2x-5\end{cases}\end{array}\right.$$. Обе системы решений не имеют.

Ответ: корней нет.

6. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x+6\geq 0\\ x^2-5x+6=x^2-1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-5x+6<0\\ -x^2+5x-6=x^2-1\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geq 3\\ x\leq 2\end{array}\right.\\ x=1{,}4\end{cases}\\ \begin{cases}2<x<3\\ 2x^2-5x+5=0\end{cases}\end{array}\right.$$. Первая система имеет решение $x = 1{,}4$, а вторая система решений не имеет.

Ответ: 1,4.

7. $$\frac{x|x+2|}{|x-1|}-|x+2|=0,\ |x+2|\cdot\left(\frac{x}{|x-1|}-1\right)=0;\ \left[\begin{array}{l}|x+2|=0\\ x-|x-1|=0\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=0{,}5\end{array}\right..$$

Ответ: −2; 0,5.

8. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-5x+6=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x^2+5x+6=0\end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: ±2; ±3.

9. Представим уравнение в виде:
$|x+3|-|x+5|=x+5-(x+3)$;
$|x+3|=-(x+3)$ при $x+3\le 0$;
$-|x+5|=x+5$ при $x+5\le 0$.
Ответ: $(-\infty; -5]$.

10. $|x-\sqrt{x}|\ge x-\sqrt{x} \Leftrightarrow x\ge 0$ (см. свойство 2).

11. $|x-\sqrt{x}\ |\le -x+\sqrt{x} \Leftrightarrow -(x-\sqrt{x})\ge 0 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}\le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\le 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 1$.
Ответ: $[0; 1]$.

12. $|x-\sqrt{x}|>x-\sqrt{x} \Leftrightarrow x-\sqrt{x}<0 \Leftrightarrow 0<x<1$.
Ответ: $(0; 1)$.

13. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-3\ge 0\\ 2x-3\ge x+1\end{cases}\\ \begin{cases}2x-3<0\\ -2x+3\ge x+1\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; \frac{2}{3}]\cup[4; +\infty)$.

14. $$x^2-2|x|-3\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2x-3\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x^2+2x-3\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 3\\ -3\le x<0\end{array}\right..$$

Ответ: $[-3; 3]$.

Замечание. Далее мы познакомим с другими вариантами решения данного неравенства.

15. $|x^2-4|+|x^2-3x+2|\le 0$, но $|x^2-4|+|x^2-3x+2|\ge 0$, значит

$|x^2-4|+|x^2-3x+2|=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4=0\\ x^2-3x+2=0\end{cases}$, откуда $x=2$.
Ответ: 2.

16. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1>0\\x-2>0\\2\ge 2\end{cases}\\ \begin{cases}x-1>0\\x-2<0\\\dfrac{x-1}{x-1}-\dfrac{x-2}{x-2}\ge 2\end{cases}\\ \begin{cases}x-1<0\\x+2>0\\0\ge 2\end{cases}\\ \begin{cases}x-1<0\\x-2<0\\0\ge 2\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система имеет решение $2 < x < +\infty$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

Геометрический смысл уравнений и неравенств, содержащих знак модуля (вида $|x - a| = b$, $|x - a| \le b$).

Пример 1. Решить неравенство $|x - 3| < 1$.

Решение. Модуль разности между числами a и b выражает расстояние между точками числовой прямой, которые соответствуют этим числам. $|a-b| = |\overrightarrow{AB}|$. Поскольку $|a - b| = |b - a|$, то не имеет значения $a < b$ или $b > a$. В нашем случае числа, удаленные от 3 на 1 равны 2 и 4. Ясно, что по условию задачи требуется найти точки, удаленные от тройки на расстояние меньшее единицы. Такие точки расположены между 2 и 4.

Ответ: (2; 4).

Пример 2. Решить уравнение $|2x - 5| = 3$.

Решение. Уравнение равносильно уравнению $|x - 2{,}5| = 1{,}5$. Точки, удаленные от 1,5 на расстояние 2,5, есть: $1{,}5 + 2{,}5 = 4$; $2{,}5 - 1{,}5 = 1$.

Ответ: 1; 4.

П р и м е р 3. Решить неравенство $|x^2 - 5| > 4$.

Решение. Если $t = x^2 - 5$, то $|t - 0| > 4$. Координаты всех точек, удаленных от нуля на расстояния, большие четырех, удовлетворяют неравенствам $t > 4$ или $t < -4$. Далее необходимо решить два неравенства: $x^2 - 5 > 4$; $x^2 - 5 < -4$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$.

П р и м е р 4. Решить уравнение $|x - 2| + |x - 4| = 4$.

Решение. По условию задачи необходимо найти такие точки на числовой прямой, суммы расстояний от которых до 2 и 4 равны 4. Ясно, что искомые точки не могут располагаться между точками с координатами 2 и 4, поскольку расстояние между этими точками равно двум.

Пусть x — числа, расположенные на координатной прямой правее четырех, тогда $x - 4 + x - 2 = 4$ и $x = 5$.

Пусть x — числа, расположенные на координатной прямой левее двух, тогда $-x + 2 - x + 4 = 4$, $x = 1$.

Ответ: 1; 5.

II
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $|f(x)| = a$

Если $a < 0$, то уравнение корней не имеет.

Если $a = 0$, то уравнение равносильно уравнению $f(x) = 0$.

Если $a > 0$, то уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$.

Обратимся к примерам.

П р и м е р 1. $|2x - 3| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=1 \\ 2x-3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ответ: 1; 2.

П р и м е р 2. $|x^2 - 5x| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x=6 \\ x^2-5x=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-6=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right.$. Ясно, что $x = -1$; $x = 6$; $x = 2$; $x = 3$.

Ответ: -1; 2; 3; 6.

П р и м е р 3. Решить уравнение $|x^2 - 5x + 6| = |x - 2|$.

Решение. Сделаем очевидные преобразования: $|(x - 2)(x - 3)| = |x - 2|$, $|x - 2|\,|x - 3| - |x - 2| = 0$, откуда $|x - 2| = 0$ или $|x-3| - 1 = 0$. Из первого уравнения получаем $x = 2$, а из второго $x - 3 = \pm 1$ и $x = 4$ или $x = 2$.

Ответ: 2; 4.

П р и м е р 4. Решить уравнение $(x - 3)^2 = |x - 3| + 6$.

Решение. Так как $|x - 3|^2 = (x - 3)^2$, положим $|x - 3| = y$, где $y \ge 0$, получим уравнение $y^2 - y - 6 = 0$, откуда $y = 3$ $(y \ge 0)$ и далее решаем уравнение $|x - 3| = 3$; $x = 0$ и $x = 6$.

Ответ: 0; 6.

П р и м е р 5. Решить уравнение $||\,|x-1|-2|-3|=2$.

Решение. Имеем последовательно:

$||\,|x-1|-2|-3|=2$ или $||\,|x-1|-2|-3=-2$;

$||x-1|-2|=5$ или $||x-1|-2|=1$.

Ясно, что 1) $|x-1|-2=5$; 2) $|x-1|-2=-5$; 3) $|x-1|-2=1$; 4) $|x-1|-2=-1$.

1) $|x-1|=7$; $x-1=\pm7$, $x=8$, $x=-6$.

2) Это уравнение корней не имеет.

3) $|x-1|=3$, $x-1=\pm3$, $x=4$, $x=-2$.

4) $|x-1|=1$, $x-1=\pm1$, $x=2$, $x=0$.

Ответ: $-6; -2; 0; 2; 4; 8$.

Заметим, что уравнение $|f(x)|=a$ равносильно уравнению $f^2(x)-a^2=0$, где $a\ge0$.

П р и м е р 6. Решить уравнение $|\sin x|=\dfrac{1}{2}$.

Решение. $$|\sin x|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\sin x=-\frac{1}{2}\\&\sin x=\frac{1}{2}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z\\&x=(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z\end{aligned}\right.$$

Ясно, что найденные корни могут быть объединены в одну формулу $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi m, m\in Z$. Этот же результат можно получить, если заменить данное уравнение на ему равносильное $\sin^2 x-\dfrac{1}{4}=0$ и применить формулу понижения степени.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in Z$.

П р и м е р 7. Решить уравнение $\left|\dfrac{|x-2|-1}{3-|x-2|}\right|=2$.

Решение. Для простоты положим $|x-2|=a$, где $a\ge0$, $a\ne3$. Получаем уравнение $\left|\dfrac{a-1}{3-a}\right|=2$, которое распадается на два: $\dfrac{a-1}{3-a}=2$; $\dfrac{a-1}{3-a}=-2$, корни которых $a=\dfrac{7}{3}$ и $a=5$. Остается решить уравнения $|x-2|=\dfrac{7}{3}$ и $|x-2|=5$.

Ответ: $-\dfrac{1}{3}; -3; 4\dfrac{1}{3}; 7$.

Упражнения.

Решить уравнения.

1. $|2x+3|=4$.
2. $|x^2+x+1|=1$.
3. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=2$.
4. $|x^3-3x|=2$.
5. $x^2-3|x|+2=0$.
6. $\left|\dfrac{|x|-1}{|x|+1}\right|=\dfrac{3}{4}$.
7. $|4-|3-|2-|1-x|||| = 2$.
8. $|\sin x-\cos x|=1$.
9. $|x\cos x-2\cos x|=|x-2|$.
10. $\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\dfrac{1}{2}$.
11. $|\sin x+\cos x|+|\sin x-\cos x|=\sqrt{3}$.

Здесь мы в большинстве случаев укажем только ответы, а решение, на наш взгляд, более сложных заданий приведем полностью.

1. $-3{,}5$; $0{,}5$.
2. -1; 0.
3. -3; $-\dfrac{1}{3}$.
4. $\left[\begin{array}{l}x^3-3x-2=0\\x^3-3x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x+1)(x^2-x-2)=0\\(x-1)(x^2+x-2)=0\end{array}\right.$. Дальнейшее решение совокупности уравнений не представляет труда.

   Ответ: ±1; ±2.
5. ±1; ±2.
6. $\pm\dfrac{1}{7}$; ±7.
7. -10; -6; -2; 0; 2; 4; 8; 12.
8. Можно решить два уравнения $\sin x-\cos x=1$ и $\sin x-\cos x=-1$, но проще заменить уравнение на равносильное $|\sin x-\cos x|^2=1$, $(\sin x-\cos x)^2=1$, $\sin 2x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}n$, $n\in Z$.

9. Заменяем уравнение на равносильное $|x-2||\cos x|-|x-2|=0$, откуда $|x-2|=0$ или $|\cos x|=1$. Первое уравнение имеет корнем $x=2$, а второе заменим на равносильное $\cos^2 x-1=0$, откуда $\sin x=0$ и $x=\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: 2; $\pi n,\ n\in Z$.

10. Воспользуемся тем, что $\sqrt{a^2}=|a|$, тогда уравнение равносильно уравнению $\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $2\dfrac{2}{3}$; 4.

Замечание. Уравнение можно решить, произведя возведение его обеих частей в квадрат.

11. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получаем ему равносильное уравнение $2\sin^2 x+2\cos^2 x+2|\cos 2x|=3$;

$2|\cos 2x|=1$; $|\cos 2x|=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1+\cos 4x}{2}=\dfrac{1}{4}$; $2+2\cos 4x=1$;

$\cos 4x=-0{,}5$; $4x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

III
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА
$|f(x)| = |g(x)|$

1. Так как $|a| = |b|$, если $a = \pm b$, то $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) + g(x))\,(f(x) - g(x)) = 0.$

П р и м е р 1. Решить уравнение $|2x - 3| = |3x + 1|$.

Решение. Имеем $2x - 3 = 3x + 1$ или $2x - 3 = -3x - 1$. Корень первого уравнения — $x = -4$, а второго — $x = 0{,}4$.

Ответ: -4; $0{,}4$.

П р и м е р 2. Решить уравнение
$|\sin x + \cos x| = 2|\sin x - 0{,}5\cos x|$.

Решение. Данное уравнение распадается на два:
$\sin x + \cos x = 2\sin x - \cos x$ и $\sin x + \cos x = -2\sin x + \cos x$.

Корни первого уравнения задаются формулой $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z$, а второго — $x = \pi k, k \in Z$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z;\ \pi k,\ k \in Z$.

П р и м е р 3. Решить уравнение $|\cos x| = |\sin x|$.

Решение. Заменяем уравнение на ему равносильное
$|\cos x|^2 = |\sin x|^2$; $\cos 2x - \sin^2 x = 0$; $\cos 2x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

П р и м е р 4. Решить уравнение $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| = |x - 1|$.

Решение. Можно решить два уравнения, а мы возведём обе части уравнения в квадрат, при этом последовательно получим:
$\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right)^2 = (x-1)^2$, $2\sqrt{1+x^2} = 1 + 2x$, $4 + 4x^2 = 1 + 4x + 4x^2$, $x = 0{,}75$.

Проверка показывает правильность найденного решения.

Упражнения.

1. $| 5x + 6 | = | 3x - 1 |$.
2. $| x^2 - x - 2 | = | 2x^2 - x - 1 |$.
3. $| \sin^2 x - \sin\ x | = | \cos^2 x - \cos\ x |$.
4. $\left|x-\sqrt{3-x^2}\right|=\left|x\sqrt{3-x^2}\right|$.
5. $\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|=2\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$.

Ответы и решения:

1. $-3{,}5; -\dfrac{5}{8}$.
2. $\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}$.
3. $\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z; \dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z;\ 2\pi n,\ n\in Z$.
4. Возведем обе части уравнения в квадрат: $\left(x-\sqrt{3-x^2}\right)^2=x^2\left(3-x^2\right)$; $3-2x\sqrt{3-x^2}=x^2\left(3-x^2\right)$. Положим далее $x\sqrt{3-x^2}=t$, тогда $t^2+2t-3=0$, откуда $t=-3$ и $t=1$. Решим два уравнения, каждое из которых равносильно системе:

$$x\sqrt{3-x^2}=-3\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-3x^2+9=0\\-\sqrt{3}<x<0\end{cases};\ x\sqrt{3-x^2}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-3x^2+1=0\\0<x<\sqrt{3}\end{cases}.$$

Уравнение первой системы корней не имеет, решением второй системы является $x=\sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$.

5. $| x^2 - 4 | = 2\ | x^2 - 1 |$

а) $x^2 - 4 = 2x^2 - 2$, корней нет;

б) $x^2 - 4 = -2x^2 + 2$; $3x^2 = 6$; $x^2 = 2$; $x = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}$.

IV
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $|f(x)| = g(x)$

1 способ

Решение заданного уравнения сводится к решению совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$ и проверке справедливости неравенства $g(x) \geq 0$ для найденных значений неизвестного.

2 способ

Так как $|f(x)| = f(x)$, если $f(x) = 0$; $|f(x)| = -f(x)$, если $f(x) < 0$; то уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности следующих систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ f(x)=-g(x) \end{cases} \end{array}\right.$. В первой системе, решив уравнение $f(x) = g(x)$, проверяют выполнение условия $f(x) \geq 0$. Аналогичные рассуждения проводят и для второй системы.

Замечания:

1. Можно решить уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$ и корни каждого из них проверить подстановкой в уравнение $|f(x)| = g(x)$.
2. Уравнение $|f(x)| = g(x)$ иногда удобно свести к системе $\begin{cases} f^2(x)-g^2(x)=0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ или просто к уравнению $f^2(x) - g^2(x) = 0$ с последующей проверкой найденных корней.

П р и м е р 1. Решить уравнение $\left|\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение. Имеем совокупность систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x-\cos x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x+\cos x-\sqrt{2}=0\end{cases}\end{array}\right.$

Уравнение $\sin x-\cos x=0$ имеет серию корней $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$, но условию $\sin x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяют значения $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$. Решаем уравнение второй системы: $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1$; $\cos(x-\frac{\pi}{4})=1$; $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$. Полученное значение не удовлетворяет условию $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$.

П р и м е р 2. Решить уравнение $|x^3+3x^2+x|=-x+x^3$.

Решение. Решаем уравнения $x^3+3x^2+x=-x+x^3$ и $x^3+3x^2+x=$ $=x-x^3$.Первое из них имеет корни $x=0$ и $x=-\frac{2}{3}$, а второе — $x=0$ и $x=-\frac{3}{2}$. Неравенство $x^3-x\ge0$ выполняется при $x=0$ и $x=-\frac{2}{3}$. Они и являются корнями уравнения.

П р и м е р 3. Решить уравнение $|\sin x+\cos x|=\sin x-\cos x$.

Решение. Составим систему согласно замечанию 2, тогда $\begin{cases}(\sin x+\cos x)^2=(\sin x-\cos x)^2\\ \sin x-\cos x\ge0\end{cases}$. Из уравнения системы получаем

$x=\frac{\pi}{2}n, n\in Z$. Проверим выполнение условия $\sin x-\cos x\geq 0$ при $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$ и $x=2\pi$. При $x=\frac{\pi}{2}$ и $x=\pi$ получаем верные равенства.

С учетом периодичности функции запишем $\frac{\pi}{2}+2\pi n, \pi+2\pi m, \{n,m\}\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n, \pi+2\pi m, \{n,m\}\in Z$.

Пример 4. Решить уравнение $|x^4+x^3-3|=x^4-5x^2+3$.
Решение. Составим и решим две системы:

$$\begin{cases}x^4+x^3-3=x^4-5x^2+3\\ x^4-5x^2+3\geq 0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x^4+x^3-3=-x^4+5x^2-3\\ x^4-5x^2+3\geq 0\end{cases}.$$

Неравенство $x^4-5x^2+3=0$ решим методом интервалов, при этом получим $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}\right]\cup\left[-\sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{2}};\sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}};+\infty\right)$.

Решим уравнение первой системы:

$x^3+5x^2-6=0$; $x^3-1+5(x^2-1)=0$, тогда $x=1$. Подставляя полученное значение в неравенство системы, видим, что это неравенство не выполняется, значит $x=1$ не является корнем исходного уравнения. Далее имеем уравнение $x^2+x+1+5x+5=0$; $x^2+6x+6=0$ и $x=-3\pm\sqrt{3}$. Проверяя неравенство, получаем, что $x=-3+\sqrt{3}$ не корень данного уравнения, а $x=-3-\sqrt{3}$ — корень данного уравнения.

Решаем уравнение второй системы: $2x^4+x^3-5x^2=0$, откуда $x=0$ и $x=\frac{-1-\sqrt{41}}{4}$ — корни исходного уравнения, а $x=\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$ не корень.

Ответ: $0; -3-\sqrt{3}; \frac{-1-\sqrt{41}}{4}$.

Упражнения.
Решить уравнения.
1. $|3x-1|+2x=4$.

2. $\left|\dfrac{x-1}{|x-2|}\right|=x$.

3. $|x^3-3x|=x^2-2x$.

4. $||x|-2|=1-2x$.

5. $||x-1|+x|=x^2-1$.

6. $|\sin 2x|=\cos x$.

7. $3\operatorname{tg} x=\sqrt{3}\,|\sin x|$.

8. $\dfrac{12}{|tgx+ctgx|}=5-\cos 4x$.

9. $1+2|\cos x|\sin x=0$.

10. $\left|\cos^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}\right|=3\cos x+1$.

Ответы и решения некоторых уравнений:

1. -3.

2. $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. $0;\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

4. Решаем уравнения $|x|-2=1-2x$ и $|x|-2=2x-1$ при условии $1-2x\geq 0$. Первое уравнение распадается на уравнения $x=3-2x$ и $x=2x-3$, откуда $x=1$ и $x=3$, но 3 и 1 не удовлетворяют неравенству $1-2x\geq 0$. Так что уравнение $|x|-2=1-2x$ корней, удовлетворяющих неравенству $1-2x\geq 0$, не имеет. Решаем уравнение $|x|=2x+1$. Оно имеет корень $-\dfrac{1}{3}$, который удовлетворяет и неравенству $1-2x\geq 0$.

Замечание: Необходимо также учитывать, что уравнение $|x|=3-2x$ имеет корни, удовлетворяющие неравенству $3-2x\geq 0$, а уравнение $|x|=2x+1$ — неравенству $2x+1\geq 0$.

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$.

5. Исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}|x-1|+x=x^2-1\\ x^2-1\geq 0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}|x-1|+x=1-x^2\\ x^2-1\geq 0\end{cases}$$

Решение первой системы уравнений в свою очередь сводится к решению двух систем: $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-1+x=x^2-1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-1<0 \\ -x+1+x=x^2-1 \end{cases}$. Первая система имеет решение $x=2$, а вторая $x=-\sqrt{2}$. Оба корня удовлетворяют неравенству $x^2-1\geq 0$.
Аналогичные рассуждения проводим и для второй системы, тогда имеем: $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-1+x=1-x^2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-1<0 \\ -x+1+x=1-x^2 \end{cases}$.

Корни уравнения первой из полученных систем $x=-1\pm\sqrt{3}$ не удовлетворяют неравенству $x-1\geq 0$, а из второй системы $x=0$ не удовлетворяет неравенству $x^2-1\geq 0$.

Ответ: $-\sqrt{2}$; 2.

6. $\sin 2x=\cos x$ или $\sin 2x=-\cos x$ при условии $\cos x\geq 0$. Решение первого уравнения $\cos x(2\sin x-1)=0$, откуда $\cos x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, $\sin x=\frac{1}{2}$ и, поскольку $\cos x\geq 0$, $x=\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\in Z$. Аналогичные рассуждения для второго уравнения приводят к ответу $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n; \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, \{n,k\}\in Z$.

7. Выполняется аналогично №6.
Ответ: $\pi n, n\in Z$.

8. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 6|\sin 2x|=5-\cos 4x \\ \sin 2x\neq 0 \end{cases}$. Решаем уравнение $6|\sin 2x|=4+2\sin^2 2x$. Полагая $|\sin 2x|=y$, $y\in[0;1]$, приходим к уравнению $y^2-3y+2=0$, откуда $y=1$. $|\sin 2x|=1$ или $\cos 2x=0$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$.

Замечание: Поскольку $5 - \cos 4x = 0$ при $x \in R$, то уравнение равносильно совокупности уравнений $6\sin 2x = 5 - \cos 4x$ и $6\sin 2x = \cos 4x - 5$, решив которые, получим тот же самый ответ.

9. Данное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x \geq 0\\ \sin 2x = -1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x < 0\\ \sin 2x = 1\end{cases}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x \geq 0\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x < 0\\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z\end{cases}\end{array}\right.$$, откуда $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$,

$x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ \{n, k,\} \in Z$.

10. $\left|\cos^2 \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\right| = 3\cos x + 1$. Применяя формулу понижения степени, получим уравнение $\left|\dfrac{1 + \cos x}{2} - \dfrac{1}{3}\right| = 3\cos x + 1$, $|1 + 3\cos x| = 6(1 + 3\cos x)$. Ясно, что $1 + 3\cos x = 0$, $\cos x = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$.

V
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА
$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| = g(x)$

Решение этих уравнений основано на определении модуля числа. Пусть дано уравнение $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| = g(x)$, где $f_i(x)$ ($i = 1,2,\ldots, n$) — функции любого характера. Это могут быть многочлены, дробно-рациональные функции, тригонометрические функции и т.д. Для каждой из функций необходимо найти область определения, ее нули и точки разрыва, разбивающие общую область определения функций $f_i(x)$ ($i = 1,2,\ldots, n$) на промежутки, в каждом из которых каждая из функций $f_i(x)$ сохраняет свой знак. Далее, используя определение модуля, для каждой из найденных областей получим уравнение, подлежащее решению на рассматриваемом промежутке.

Пример 1. Решить уравнение $2|x-2|-3|x+4| = 1$.

Решение. Для освобождения от знака модуля разобьем числовую прямую на промежутки $x \le -4$; $-4 < x \le 2$; $x > 2$. Решение уравнения сводится к решению трех систем:

а) $\begin{cases} x \le -4 \\ -2x+4+3x+12=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le -4 \\ x=-15 \end{cases}$. -15 — корень исходного уравнения.

б) $\begin{cases} -4 < x \le 2 \\ -2x+4-3x-12=1 \end{cases}$; $\begin{cases} -4 < x \le 2 \\ x=-1{,}8 \end{cases}$. $-1{,}8$ — корень исходного уравнения.

в) $\begin{cases} x > 2 \\ 2x-4-3x-12=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 2 \\ x=-17 \end{cases}$. Система решений не имеет.

Ответ: -15; $-1{,}8$.

П р и м е р 2. Решить уравнение $|x^2 - x| + |x - 2| = x^2 - 2$.

Решение. Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$. Эти числа разбивают координатную прямую на четыре промежутка, и, значит, необходимо решить четыре системы.

а) $\begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - x - x + 2 = x^2 - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Система решений не имеет.

б) $\begin{cases} 0 < x \le 1 \\ -x^2 + x - x + 2 = x^2 - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 0 < x \le 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$. Система решений не имеет.

в) $\begin{cases} 1 < x \le 2 \\ x^2 - x - x + 2 = x^2 - 2 \end{cases}$. Откуда $x = 2$.

г) $\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - x + x - 2 = x^2 - 2 \end{cases}$. Откуда $x > 2$.

Ответ: [2; + 8).

П р и м е р 3. Решить уравнение $|\sin x - 0{,}5| - |\cos x - 0{,}5| = 1$.

Решение. Сначала будем искать решения уравнения на отрезке длины 2π, поскольку период $\sin x$ и $\cos x$ равен 2π. Находим те значения x на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$, при которых $\sin x = 0{,}5$ и $\cos x = 0{,}5$. Это: $-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}$. Рассмотрим решение уравнения на пяти промежутках, несколько видоизменив их вид:

а) $\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6} \\ -\sin x + 0{,}5 - \cos x + 0{,}5 = 1 \end{cases}$. Откуда $x = -\frac{\pi}{4}$.

б) $\begin{cases} \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3} \\ \sin x - 0{,}5 - \cos x + 0{,}5 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3} \\ x = \pi, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Система решений не имеет.

в) $\begin{cases}\frac{\pi}{3}<x\le\frac{5\pi}{6}\\ \sin x-0{,}5+\cos x-0{,}5=1\end{cases}$. Система решений не имеет.

г) $\begin{cases}\frac{5\pi}{6}<x\le\frac{5\pi}{3}\\ -\sin x+0{,}5+\cos x-0{,}5=1\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{5\pi}{6}<x\le\frac{5\pi}{3}\\ \cos x-\sin x=1\end{cases}$. Откуда $x=\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi m;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n, \{m,n\}\in Z$.

Упражнения.

Решить уравнения.

1. $|5-3x|=2x+1$.
2. $|3x-8|-|3x-2|=6$.
3. $|2x+7|-2|3x-1|=4x+1$.
4. $\sqrt{x-2}+|x-3|=|x-4|$.
5. $\left|\frac{1}{x}-1\right|+|x-2|=1$.
6. $|\operatorname{tg} x|+|\sin x|=|\sin x|^3$.
7. $|x+2|-|2x+8|=a$.
8. $2^{|x-2|}+|2^x-2|=5$.
9. $||x-2|-1|+|x+1|=4$.
10. $\frac{4|x-3|-x}{2-|x-2|}=4$.

Ответы и решения:

1. 0,8; 6.
2. $(-\infty;\ \frac{2}{3}]$.
3. ±1.
4. 3.
5. 1; $1+\sqrt{2}$.

6. ***Решение.*** $|\operatorname{tg} x| + |\sin x| - |\sin x|^3 = 0$; $|\operatorname{tg} x| + |\sin x| \cos 2x = 0$;

$|\sin x|(\frac{1}{|\cos x|} + \cos^2 x) = 0$. Так как выражение в скобках положительно, $|\sin x| = 0$ и $x = \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\pi n, n \in Z$.

7. Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = -4$ и $x = -2$. Решим три системы уравнений:

а) $\begin{cases} x \le -4 \\ -x-2+2x+8=a \end{cases}$; $\begin{cases} x \le -4 \\ x = a-6 \end{cases}$, при этом $a - 6 \le -4$, то есть $a \le 2$. Итак, при $a \in (-\infty; 2]$ имеем корень $x = a - 6$.

б) $\begin{cases} -4 < x \le -2 \\ -x-2-2x-8=a \end{cases}$; $\begin{cases} -4 < x \le -2 \\ x = -\frac{1}{3}(a+10) \end{cases}$. $x = -\frac{1}{3}(a + 10)$ будет корнем исходного уравнения, если $6 \le a + 10 < 12$, то есть при $-4 \le a < 2$ или при $a \in [-4; 2)$.

в) $\begin{cases} x > -2 \\ x+2-2x-8=a \end{cases}$; $\begin{cases} x > -2 \\ x = -a-6 \end{cases}$, причем $-a - 6 > -2$; $-a > 4$; $a < 4$.
Итак, при $a < -4$ имеем корень $x = -a - 6$.
Ответ:
при $a \in (-\infty; -4]$ уравнение имеет два корня: $x = a - 6$ и $x = -a - 6$;
при $a \in (-4; 2)$ уравнение имеет два корня: $x = a - 6$
и $x = -\frac{1}{3}(a + 10)$;
при $a = 2$ уравнение имеет единственный корень $x = -4$;
при $a > 2$ уравнение корней не имеет.

8. Подмодульные выражения уравнения обращаются в нуль при $x = 1$ и $x = 2$. Составим и решим три системы.

а) $\begin{cases} x \le 1 \\ 2^{-x+2} - 2^x + 2 = 5 \end{cases}$. Решаем уравнение системы $\frac{4}{2^x} - 2^x - 3 = 0$.

Если $2^x = t$, $t>0$, то $t^2 + 3t - 4 = 0$, откуда $t = 1$, $2^x = 1$ и $x=0$, что является решением системы, а значит, и данного уравнения.

б) $\begin{cases} 1<x\le 2 \\ 2^{-x+2}+2^x-7=0 \end{cases}$. Решение уравнения системы дает $2^x = \dfrac{7\pm\sqrt{33}}{2}$.

Если $1 < x \le 2$, то $2 < 2^x \le 4$, но $\dfrac{7\pm\sqrt{33}}{2} \notin [2; 4]$.

в) $\begin{cases} x>2 \\ 2^{x-2}+2^x-2=5 \end{cases}$, $2^x(0{,}25 + 1) = 7$, $2^x = 5{,}6$, и если $x > 2$, то $2^x > 4$. Ясно, что $x=\log_2 5{,}6$.

Ответ: 0; $\log_2 5{,}6$.

9. Пусть $x \ge 2$, тогда решаем уравнение $|x-3| + |x+1| = 4$, которое равносильно уравнению $|x-3|+x+1=4$, $|x-3|=3-x$. Последнее уравнение имеет решение $(-\infty; 3]$ и с учетом неравенства $x\ge 2$ получаем $[2; 3]$.

Пусть $x<2$, получаем уравнение $|-x+2-1|+|x+1|=4$, $|x-1| + |x+1| = 4$.

а) $\begin{cases} x\le -1 \\ 1-x-x-1=4 \end{cases}$; $x=-2$;

б) $\begin{cases} -1<x\le 1 \\ 1-x+x+1=4 \end{cases}$; $\varnothing$;

в) $\begin{cases} 1<x\le 2 \\ x-1+x+1=4 \end{cases}$; $x=2$.

Ответ: -2; $[2; 3]$.

10. $\dfrac{4|x-3|-x}{2-|x-2|}=4$. Область определения уравнения найдем из неравенства $|x-2| \ne 2$; $x \ne 0$; $x \ne 4$. Далее получим уравнение $4|x-3| - x = 8 - 4|x-2|$.

а) $\begin{cases} x \le 2 \\ -4x+12-x=8+4x-8 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 2 \\ x=1\frac{1}{3} \end{cases}$; $x=1\frac{1}{3}$;

б) $\begin{cases} 2 < x \le 3 \\ -4x+12-x=8-4x+8 \end{cases}$; $\varnothing$;

в) $\begin{cases} x > 3 \\ 4x-12-x=8-4x+8 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 3 \\ x=4 \end{cases}$, откуда $x = 4$, но 4 не входит в область определения уравнения.

Ответ: $1\frac{1}{3}$.

VI
ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИЯХ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛИ

Хорошо известно, что правильно сделанная замена переменного существенно упрощает решение задачи. Мы уже производили очевидную замену переменного в ряде задач, специально это не оговаривая.

Пример 1. Решить уравнение $\cos^2 x = 1{,}5\,|\sin\ x|$.

Решение. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - |\sin\ x|^2$, то положим $|\sin\ x| = t$, $t \in [0;1]$, получим уравнение $t^2 + 1{,}5t - 1 = 0$, корни которого $t = 0{,}5 \in [0;1]$ и $t = -2 \notin [0;1]$. Итак, $|\sin\ x| = 0{,}5$,

$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{1}{|\cos x|} = \sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1$.

Решение. Заметив, что $\dfrac{1}{|\cos x|} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, и, обозначив $\operatorname{tg} x = t$, получаем уравнение $\sqrt{1+t^2} = \sqrt{3}t - 1$, $1 + t^2 = 3t^2 - 2\sqrt{3t} + 1$, $2t^2 - 2\sqrt{3t} = 0$, откуда $t = 0$ — посторонний корень, и $t = \sqrt{3}$. Значит, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и

$x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

П р и м е р 3. Решить уравнение $\sqrt{|x-2|-1}+\sqrt{x+3}=2$.

Решение. Положим $\sqrt{x+3}=t, t\geq 0$, тогда $x = t^2 - 3$ и данное уравнение принимает вид $\sqrt{|t^2-5|-1}+t=2$ (*); $|t^2 - 5| = (t - 2)^2 + 1$; $|t^2 - 5| = t^2 - 4t + 5$. Поскольку $t^2 - 4t + 5 > 0$, исходное уравнение распадается на два: $t^2 - 5 = t^2 - 4t + 5$ и $-t^2 + 5 = t^2 - 4t + 5$. Из первого уравнения находим $t = 2{,}5$, которое не является решением уравнения (*). Второе уравнение дает $t = 0$ и $t = 2$, которые являются корнями уравнения (*). Итак, $\sqrt{x+3}=0$, $x = -3$ и $\sqrt{x+3}=2$, $x = 1$.

Ответ: -3; 1.

П р и м е р 4.

Решить уравнение $\sqrt{x-4\sqrt{x-2}+2}+\sqrt{x-6\sqrt{x-2}+7}=5$.

Решение. Положим $\sqrt{x-2}=t$; $t \geq 0$, $x = t^2 + 2$, тогда $\sqrt{t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-6t+9}=5$, $|t - 2| + |t - 3| = 5$. Решаем три системы:

а) $\begin{cases} 0\leq t\leq 2 \\ -t-t+5=5 \end{cases}$; $t=0$;

б) $\begin{cases} 2<t\leq 3 \\ t-2-t+3=5 \end{cases}$; $\varnothing$;

в) $\begin{cases} t>3 \\ t-2+t-3=5 \end{cases}$; $t=5$.

Итак, $\sqrt{x-2}=0$ и $x = 2$; $\sqrt{x-2}=5$ и $x = 27$.

Ответ: 2; 27.

Упражнения.

Решить уравнения.

1. $\sqrt{2}\ |\sin\ x| = \operatorname{ctg} x$.
2. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=1$.

3. $4-\sqrt{x+5-2\sqrt{x+4}}=\sqrt{x+13-6\sqrt{x+4}}$.

4. $|x+3|+|x+2|=2|x+1|$.

Указание. Обе части уравнения разделить на $|x+1|\neq 0$ и положить $\frac{1}{x+1}=t$.

5. $\sqrt{x-1}+|x-2|=5$.

6. $|x^2-5x+6|+|x^2-5x+4|=2$.

7. $2|\sin x-\cos x|+3|\sin x+\cos x|=5$.

8. $|5x-3|-|7x-4|=2x-1$.

Ответы и возможные варианты решений:

1. Так как $|\sin x|=\sqrt{\frac{1}{1+ctg^2x}}$, то данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{\frac{2}{1+ctg^2x}}=\operatorname{ctg}x$. Полагая далее $\operatorname{ctg}x=y$, $y\geq 0$, приходим к уравнению $y^4+y^2-2=0$, откуда $y^2=1$ и $y=1$. Итак, $\operatorname{ctg}x=1$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

2. Полагая $\sqrt{x+1}=t$, $t\geq 0$, $x=t^2-1$, получаем уравнение $\sqrt{t^2+4-4t}+\sqrt{t^2+1+2t}=1$, $|t-2|+|t+1|=1$ и, так как $t\geq 0$, то $|t+1|=t+1$ и $|t-2|=-t$. Ясно, что $t\leq 0$ и $t-2\leq 0$, поэтому $2-t=-t$.
Ответ: корней нет.

3. Введем переменную $t=\sqrt{x+4}$; $t\geq 0$, тогда $x=t^2-4$ и данное уравнение принимает вид $4-\sqrt{t^2-2t+1}=\sqrt{t^2-6t+9}$, $4-|t-1|=$ $=|t-3|$ (*).

а) $\begin{cases}0\leq t<1\\ 4+t-1=-t+3\end{cases}$; $\begin{cases}0\leq t<1\\ t=0\end{cases}$; $t=0$.

б) $\begin{cases} 1 \le t < 3 \\ 4 - t + 1 = -t + 3 \end{cases}$. Решений нет.

в) $\begin{cases} t \ge 3 \\ 4 - t + 1 = t - 3 \end{cases}$; $\begin{cases} t \ge 3 \\ t = 4 \end{cases}$; $t = 4$.

Ответ: −4; 12.

4. Заменяем уравнение на равносильное: $\left|\dfrac{x+3}{x+1}\right| + \left|\dfrac{x+2}{x+1}\right| = 2$;

$\left|1 + \dfrac{2}{x+1}\right| + \left|1 + \dfrac{1}{x+1}\right| = 2$. Полагаем далее $\dfrac{1}{x+1} = t$ и получаем уравнение $|1 + 2t| + |1 + t| = 2$.

а) $\begin{cases} t \le -1 \\ -1 - 2t - 1 - t = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} t \le -1 \\ t = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$; $t = -\dfrac{4}{3}$.

б) $\begin{cases} -1 < t \le -0{,}5 \\ -1 - 2t + 1 + t = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} -1 < t \le -0{,}5 \\ t = -2 \end{cases}$. Решений нет.

в) $\begin{cases} t > -0{,}5 \\ 2 + 3t = 2 \end{cases}$; $t = 0$.

Далее решаем два уравнения:

$\dfrac{1}{x+1} = -\dfrac{4}{3}$; $3 = -4x - 4$; $4x = -7$; $x = -1\dfrac{3}{4}$.

Уравнение $\dfrac{1}{x+1} = 0$ корней не имеет.

Ответ: −1,75.

5. Пусть $t = \sqrt{x-1}$, $t \ge 0$, тогда $x = t^2 + 1$, $t + |t^2 - 1| = 5$; $|t^2 - 1| = 5 - t$.

а) $\begin{cases} t^2-1=5-t \\ 5-t\ge 0 \\ t\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} t^2+t-6=0 \\ 0\le t\le 5 \end{cases}$. $t=-3$ и $t=2$. $t=-3<0$.

б) $\begin{cases} t^2-1=t-5 \\ 5-t\ge 0 \\ t\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} t^2-t+4=0 \\ 0\le t\le 5 \end{cases}$. Корней нет.

Итак, $\sqrt{x-1}=2$ и $x=5$.

Ответ: 5.

6. Пусть $|x^2-5x+4|=t\ge 0$, тогда $x^2-5x+4=\pm t$, и после соответствующей замены получаем $|\pm t+2|+t=2$; $|\pm t+2|=2-t$.

$\begin{cases} 2-t\ge 0 \\ t+2=2-t \end{cases}$; $\begin{cases} 2-t\ge 0 \\ 2-t=2-t \end{cases}$; $\begin{cases} 2-t\ge 0 \\ t+2=t-2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2-t\ge 0 \\ -t+2=-2+t \end{cases}$.

При решении этих систем получаем $t=0$ и $t\le 2$. Решение уравнения $x^2-5x+4=0$ дает корни $x=1$ и $x=4$. Решение неравенства $x^2-5x+4\le 2$ приводит к неравенству $\frac{5-\sqrt{17}}{2}\le x\le\frac{5+\sqrt{17}}{2}$. Решение неравенства $x^2-5x+4\ge -2$ дает объединение двух промежутков: $(-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty)$.

Ответ: $\left[\frac{5-\sqrt{17}}{2};2\right]\cup\left[3;\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$.

7. Пусть $|\sin x+\cos x|=t$, где $t\in[0;\ \sqrt{2}\,]$, тогда $2\sin x\cos x=t^2-1$ и $|\sin x-\cos x|=\sqrt{1-2\sin x\cos x}=\sqrt{2-t^2}$. Имеем уравнение $2\sqrt{2-t^2}+3t=5$; $2\sqrt{2-t^2}=5-3t$; $8-4t^2=25-30t+9t^2$; $13t^2-30t+17=0$. Последнее уравнение дает $t=1$ и $t=\frac{17}{13}$. Оба значения принадлежат промежутку $[0;\ \sqrt{2}\,]$. Остается решить два уравнения.

а) $|\sin x+\cos x|=1$. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим $\sin 2x=0$, $x=\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$.

б) $|\sin\ x + \cos\ x| = \frac{17}{13}$; $\sin 2x = \frac{120}{169}$;

$x = 0{,}5(-1)^k \arcsin\frac{120}{169} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2}n; \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\frac{120}{169} + \frac{\pi}{2}k,\ \{n,k\} \in Z$.

8. Пусть $5x - 3 = a$, $7x - 4 = b$, тогда $|a| - |b| = b - a$, а последнее равенство является верным для $a \le 0$ и $b \le 0$.

Имеем систему $\begin{cases} 5x - 3 \le 0 \\ 7x - 4 \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le \frac{3}{5} \\ x \le \frac{4}{7} \end{cases}$; $x \le \frac{4}{7}$.

Примечание. Показаны нетрадиционные способы решения. Уравнения, конечно, можно решать и традиционными способами.

Ответ: $(-8; \frac{4}{7}]$.

VII
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ, ПРИ НАЛИЧИИ ПАРАМЕТРОВ (аналитический способ)

Пример 1. Решить уравнение $|x - a| = a + 3$.

Решение. При $a + 3 < 0$, т. е. при $a < -3$, уравнение корней не имеет. При $a = -3$ уравнение имеет корень $x = -3$. При $a > -3$ уравнение распадается на два: $x - a = a + 3$ или $x - a = -a - 3$, откуда $x = 2a + 3$ и $x = -3$.

Ответ: при $a < -3$ корней нет; при $a = -3$ $x = -3$; при $a > -3$ $x = -3$ и $x = 2a + 3$.

Пример 2. Для каждого значения a найти число корней уравнения $|x - 1| = ax + 2$.

Решение.

1. Пусть $x \geq 1$, тогда $x - 1 = ax + 2$; $(a - 1)x = -3$ и $x = \dfrac{3}{1-a}$ при $a \neq 1$. Проверим, при каких значениях a выполняется неравенство $x \geq 1$:

$$\frac{3}{1-a} \geq 1; \ \frac{2+a}{1-a} \geq 0; \ -2 \leq a < 1.$$

Пусть $x \leq 1$, тогда $-x + 1 = ax + 2$; $(a + 1)x = -1$; $x = -\dfrac{1}{a+1}$ при $a \neq -1$. Проверим, при каких значениях a выполняется неравенство

$-\dfrac{1}{a+1} \leq 1$; $\dfrac{a+2}{a+1} \geq 0$, откуда $a \in (-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$.

Занесем результаты решения в таблицу:

a	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$\frac{3}{1-a}$	–	+	+	+	+	–	–
$-\frac{1}{a+1}$	+	+	–	–	+	+	+

Примечание: «–» означает не корень, «+» означает корень.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ уравнение имеет один корень, при $a \in (-1; 1)$ — два корня.

Замечание: Авторы умышленно значение $a = -2$ включили в два рассматриваемых промежутка, что позволяет сделать проверку выполнения задания. Очевидно, что при $a = -2$ $\quad \frac{3}{1-a} = -\frac{1}{a+1}$, и уравнение имеет один корень. Далее будет дано графическое решение этого упражнения.

Пример 3. Решить уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

Решение. Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = -3$ и $x = 1$.

Пусть $x < -3$, тогда $-x - 3 + ax - a = 4$; $x(a - 1) = a + 7$; $x = \frac{a+7}{a-1}$ при а $\neq$ 1. Найдем те значения a, при которых $\frac{a+7}{a-1} < -3$; $\frac{4a+4}{a-1} < 0$; $\frac{a+1}{a-1} < 0$. Очевидно, что $|a| < 1$.

Пусть $-3 \le x \le 1$, тогда получаем уравнение $x + 3 + ax - a = 4$, $x(a + 1) = a + 1$, и если $a = -1$, то $-3 \le x \le 1$ — решение данного уравнения; если $a \neq -1$, то $x = 1$.

Рассматривая случай, когда $x > 1$, получаем уравнение $x + 3 - ax + a = 4$, $x(1 - a) = 1 - a$. Если $a = 1$, решением уравнения является $x > 1$; если $a \neq 1$, то $x = 1$.

Ответ: при $a = 1$ $\quad x \ge 1$; при $a = -1$ $\quad -3 \le x \le 1$; при $|a| < 1$ $x = 1$ и $x = \frac{7+a}{a-1}$; при $|a| > 1$ $x = 1$.

Упражнения.

Решить уравнения.

1. $x^2 + |x| + a = 0$.
2. $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$.
3. $a|x - 2| = 2x + 3$.
4. $|2x + 2| = x^2 + a^2$.
5. $|x - a| - |x - 2| = 1$.

Ответы и решения упражнений.

1. Пусть $x \geq 0$, тогда $x^2 + x + a = 0$. Если $1 - 4a < 0$, т. е. $a > 0{,}25$, то уравнение корней не имеет. Если $a = 0{,}25$, решение квадратного уравнения дает $x = -0{,}5$, что не удовлетворяет неравенству $x \geq 0$. Пусть $a < 0{,}25$, тогда корень $x_1 = 0{,}5\,(-1 - \sqrt{1-4a})$ не удовлетворяет неравенству $x \geq 0$, а корень $x_2 = 0{,}5\,(-1 + \sqrt{1-4a})$ этому неравенству будет удовлетворять, если $\sqrt{1-4a} \geq 1$, т. е. при $a \leq 0$.

   Пусть $x < 0$. Имеем уравнение $x^2 - x + a = 0$. Если $a > 0{,}25$, уравнение корней не имеет. При $a \leq 0{,}25$ уравнение имеет корни $x_3 = 0{,}5\,(1 + \sqrt{1-4a})$ и $x_4 = 0{,}5\,(1 - \sqrt{1-4a})$. Первый корень не удовлетворяет условию $x < 0$, а второй при выполнении проверки условия $x < 0$ дает $a < 0$.

   Ответ: при $a < 0$ $x = 0{,}5\,(-1 + \sqrt{1-4a})$; $x = 0{,}5\,(-1 - \sqrt{1-4a})$; при $a = 0$ $x = 0$; при $a > 0$ решений нет.

2. Положим $12^{|x|} = t$, где $t > 0$, получаем уравнение $t^2 - 2t + a = 0$, которое не имеет корней, если $1 - a < 0$, т. е. $a > 1$ и имеет единственный корень $t = 1$ при $a = 1$, но тогда $12^{|x|} = 1$ и $x = 0$. При $a < 1$ уравнение имеет корни $t_1 = 1 + \sqrt{1-a}$, который дает $12^{|x|} = 1 + \sqrt{1-a}$, а далее $x = \pm \log_{12}(1 + \sqrt{1-a})$, и $t_2 = 1 - \sqrt{1-a}$, который положителен при $0 < a < 1$, тогда $12^{|x|} = 1 - \sqrt{1-a}$, $|x| = \log_{12}(1 - \sqrt{1-a})$. Очевидно, что $\log_{12}(1 - \sqrt{1-a}) < \log_{12}1 = 0$.

   Ответ: при $a \leq 1$ $x = \pm \log_{12}(1 + \sqrt{1-a})$, при $a > 1$ уравнение корней не имеет.

3. $a\,|x - 2| = 2x + 3$.

   При $x \geq 2$ получаем уравнение $ax - 2a = 2x + 3$; $(a - 2)x = 2a + 3$. Если $a = 2$, то уравнение не имеет корней. При $a \neq 2$ $x = \dfrac{2a+3}{a-2}$. Эти значения будут корнями уравнения при всех a, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{2a+3}{a-2} \geq 2$, откуда $a > 2$.

При $x < 2$ получаем уравнение $ax - 2a = -2x - 3$; $(a + 2)x = 2a - 3$. При $a = -2$ уравнение корней не имеет. Пусть $a \neq -2$, тогда $x = \dfrac{2a-3}{a+2}$. Очевидно, что должно выполняться неравенство

$\dfrac{2a-3}{a+2} < 2$, которое дает $a > -2$.

Дополнительно исследуем случаи $a = 2$ и $a = -2$. При $a = 2$ получаем уравнение $|2x - 4| = 2x + 3$, которое дает корень $x = 0{,}25$. При $a = -2$ уравнение $|2x - 4| = -2x - 3$ корней не имеет.

Ответ: при $a \leq -2$ уравнение корней не имеет, при $-2 < a \leq 2$

$x = \dfrac{2a-3}{a+2}$, при $a > 2$ $x = \dfrac{2a+3}{a-2}$ и $x = \dfrac{2a-3}{a+2}$.

Примечание. В дальнейшем будет дан и графический способ решения этого уравнения.

4. Рассмотрим решение двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 2x - 2 + a^2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -1 \\ x^2 + 2x + 2 + a^2 = 0 \end{cases}.$$

Решением уравнения первой системы являются корни вида $x = 1 \pm \sqrt{3 - a^2}$. Если $|a| > \sqrt{3}$, то исходное уравнение не имеет корней. Если $a = \pm\sqrt{3}$, то уравнение имеет корень $x = 1$. Если $|a| < \sqrt{3}$, то уравнение имеет корни $x = 1 \pm \sqrt{3 - a^2}$, удовлетворяющие условию $x \geq -1$.

Уравнение второй системы корней не имеет, поскольку $(x + 1)^2 + a^2 + 1 > 0$ при любых действительных x.

Ответ: при $|a| \leq \sqrt{3}$ $x = 1 \pm \sqrt{3 - a^2}$; при $a > \sqrt{3}$ и при $a < -\sqrt{3}$ уравнение корней не имеет.

5. Пусть $a = 2$, тогда $|x - 2| - |x - 2| = 1$ — корней нет.
При $a > 2$,имеем три системы:

а) $\begin{cases} x \leq 2 \\ -x + a + x - 2 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ a = 3 \end{cases};$

б) $\begin{cases} 2 < x \le a \\ -x + a - x + 2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2 < x \le a \\ x = \dfrac{1+a}{2} \end{cases}$. Найденные значения будут корнями уравнения, если $2 < \dfrac{1+a}{2} \le a$, откуда $a > 3$.

в) $\begin{cases} x > a \\ x - a - x + 2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x > a \\ a = 1 \end{cases}$. Решений нет, поскольку рассматривается случай $a > 2$.

При $a < 2$ опять имеем три системы:

а) $\begin{cases} x \le a \\ -x + a + x - 2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le a \\ a = 3 \end{cases}$. Решений нет, поскольку рассматривается случай $a < 2$.

б) $\begin{cases} a < x \le 2 \\ x - a + x - 2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a < \dfrac{a+3}{2} \le 2 \\ x = \dfrac{a+3}{2} \end{cases}$. Для определения возможных значений a необходимо решить систему $\begin{cases} a + 3 \le 4 \\ 2a < a + 3 \end{cases}$, откуда $a \le 1$.

в) $\begin{cases} x > 2 \\ x - a - x + 2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 2 \\ a = 1 \end{cases}$.

Ответ: при $a = 1$ $x \ge 2$; при $a = 3$ $x \le 2$; при $a > 3$ $x = \dfrac{1+a}{2}$; при $a < 1$ $x = \dfrac{a+3}{2}$; при $1 < a < 3$ решений нет.

VIII
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВИДА
$|f(x)| \le a$, $|f(x)| \le |g(x)|$, $|f(x)| \ge a$, $|f(x)| \ge |g(x)|$

Прежде всего заметим, что $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$, где $a \ge 0$ (при a < 0 неравенство решения не имеет); $|x| \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge a \\ x \le -a \end{array}\right.$, где $a \ge 0$, при $a < 0$ неравенство выполняется при любых действительных x.

Значит, $|f(x)| \le a \Leftrightarrow -a \le f(x) \le a$ при $a \ge 0$, при $a < 0$ решений нет и $|f(x)|$ і а $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge a \\ f(x) \le -a \end{array}\right.$, неравенство же $|f(x)| > a$ выполняется при любых значениях x из области определения функции $f(x)$.

Напомним одно свойство числовых неравенств: если $a > b$, $a > 0$, $b > 0$, то $a^2 > b^2$. Верно и обратное утверждение: если $a^2 > b^2$, $a > 0$, $b > 0$, то $a > b$. Заметим также, что $|a|^2 = a^2$, а поэтому неравенства $|f(x)| \le a$ $(a \ge 0)$, $|f(x)| \le |g(x)|$, $|f(x)| \ge a$ $(a \ge 0)$, $|f(x)| \ge |g(x)|$ можно заменить на равносильные $f^2(x) - a^2 \le 0$, $f^2(x) - g^2(x) \le 0$, $f^2(x) - a^2 \ge 0$, $f^2(x) - g^2(x) \ge 0$. В некоторых случаях такой подход существенно облегчает решение.

П р и м е р 1. Решить неравенство $|5x - 3| \le 4$.

Решение.

1 способ. $|5x - 3| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le 5x - 3 \le 4 \Leftrightarrow -0{,}2 \le x \le 1{,}4$.

2 способ. Заменяем данное неравенство равносильным $(5x - 3)^2 - 4^2 \le 0$ и применяем метод интервалов.

Ответ: $[-0{,}2;\ 1{,}4]$.

П р и м е р 2. Решить неравенство $|x - 3| \ge 2$.

Решение.

1 способ. $|x - 3| \ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 \ge 2 \\ x - 3 \le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \\ x \le 1 \end{array}\right.$.

2 способ. $|x-3| \ge 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 \ge 4 \Leftrightarrow (x-3-2)(x-3+2) \ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-5)(x-1) = 0$. Далее метод интервалов дает тот же результат.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство $|x^2 - 5x| \le 6$.
Решение. Данное неравенство заменяем равносильным
$(x^2-5x)^2 - 6^2 \le 0 \Leftrightarrow (x^2-5x-6)(x^2-5x+6) \le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-3)(x-6) \le 0$.
Это неравенство легко решается методом интервалов.

Ответ: $[-1; 2] \cup [3; 6]$.

Замечание: Исходное неравенство равносильно двойному неравенству $-6 \le x^2 - 5x \le 6$. Решение этого неравенства более громоздко, чем решение, приводимое авторами.

Пример 4. Решить неравенство $|\sin x| > |\cos x|$.
Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству

$\sin^2 x - \cos^2 x > 0$ или $\cos 2x < 0$, откуда $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n < x < \dfrac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Пример 5. Решить неравенство $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| \le 2$.

Решение. Заменим неравенство ему равносильным и решим его методов интервалов:

$$\left(\frac{x-1}{x+2}-2\right)\left(\frac{x-1}{x+2}+2\right) \le 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-2x-4}{x+2}\cdot\frac{x-1+2x+4}{x+2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(3x+3)(x+5)}{(x+2)^2} \ge 0.$$

Ответ: $[-5; -2) \cup (-2; -1]$.

Упражнения.
Решить неравенства.
1. $|2x - 6| \le 3$.
2. $|3x - 1| > |2x - 5|$.
3. $|x^2 - 5| \ge 4$.

4. $|x^2 + x - 3| \le |2x^2 + x - 2|$.
5. $|\log^2_3 x - 2| \ge |\log_3 x|$.
6. $|2\sin x - 1| \le |\sin x|$.
7. $\left|\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}\right| \ge 1$.

Ответы и решения:

1. $[1,5;\ 4,5]$.
2. $(-\infty;\ -4) \cup (1,2;\ +\infty)$.
3. $(-\infty;\ -3] \cup [-1;\ 1] \cup [3;\ +\infty)$.
4. $(-\infty;\ -\dfrac{5}{3}] \cup [1;\ +\infty)$.
5. ***Решение.*** Отметим, что $x > 0$.

   Тогда $(\log^2_3 x - \log_3 x - 2)(\log^2_3 x + \log_3 x - 2) \ge 0$.

   Произведем замену $t = \log_3 x$, при этом получим неравенство $(t^2 - t - 2)(t^2 + t - 2) \ge 0$; $(t-1)(t-2)(t+1)(t+2) \ge 0$. Решение полученного неравенства методом интервалов дает $t \in (-\infty;-2] \cup [-1;1] \cup [2;+\infty)$. Возвратимся к прежней переменной: $t \le -2$; $\log_3 x \le -2$; с учетом ограничения $x > 0$ получаем $0 < x \le \dfrac{1}{9}$; $-1 \le t \le 1$; $-1 \le \log_3 x \le 1$; $\dfrac{1}{3} \le x \le 3$; $t \ge 2$; $\log_3 x \ge 2$; $x \ge 9$.

   Ответ: $(0;\ \dfrac{1}{9}] \cup [\dfrac{1}{3};\ 3] \cup [9;\ +\infty)$.

6. $(2\sin x - 1 - \sin x)(2\sin x - 1 + \sin x) \le 0$; $(\sin x - 1)(3\sin x - 1) \le 0$.

   Очевидно, что $\sin x - 1 \le 0$, поэтому $\left[\begin{array}{l} 3\sin x - 1 \ge 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x \ge \dfrac{1}{3}$.

   Ответ: $[\arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi n;\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi n]$, $n \in Z$.

7. $\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2-1} - 1\right)\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2-1} + 1\right) \ge 0$; $\dfrac{x^2(3x^2-2)}{(x^2-1)^2} \ge 0$.

   Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ -\sqrt{\dfrac{2}{3}}] \cup [\sqrt{\dfrac{2}{3}};\ 1) \cup (1;\ +\infty) \cup \{0\}$.

IX
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВИДА
$|f(x)| \le g(x)$ и $|f(x)| \ge g(x)$

1 **с п о с о б.** Неравенство $|f(x)| \le g(x)$ равносильно совокупности двух систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)\le g(x)\end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ -f(x)\le g(x)\end{cases}\end{array}\right.$. Аналогичные рассуждения верны и для неравенства $|f(x)| \ge g(x)$.

2 **с п о с о б.** Неравенство $|f(x)| \le g(x)$ имеет решение при $g(x)\ge 0$, поэтому $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x)-g^2(x)\le 0 \\ g(x)\ge 0\end{cases}$. Неравенство $|f(x)|\ge g(x)$ выполняется для всех x из области определения функции $f(x)$, при которых $g(x)<0$. Если же $g(x) \ge 0$, то $|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \ge 0$. Итак, при решении неравенства $|f(x)| \ge g(x)$ необходимо рассматривать два случая.

3 **с п о с о б.** Неравенство $|f(x)| \le g(x)$ можно решить, заметив, что оно равносильно двойному неравенству $-g(x)\le f(x)\le g(x)$. То же самое можно записать так: $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge -g(x) \\ f(x)\le g(x)\end{cases}$.

П р и м е р 1. Решить неравенство $|x^2 - x| \le x + 2$.

Решение. Наиболее рационально при решении этого неравенства использовать второй или третий способ. Согласно рассуждениям, приведенным во втором способе, получаем:

$$|x^2 - x| \le x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-x)^2-(x+2)^2\le 0 \\ x\ge -2\end{cases}.$$

Решение первого неравенства системы дает $(x^2+2)(x^2-2x-2)\le 0$, откуда $1-\sqrt{3}\le x\le 1+\sqrt{3}$. С учетом второго неравенства системы получаем $1-\sqrt{3}\le x\le 1+\sqrt{3}$. При использовании третьего способа необходимо решить систему неравенств $\begin{cases} x^2-x\le x+2 \\ x^2-x\ge -x-2 \end{cases}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}\le x\le 1+\sqrt{3}$.

П р и м е р 2. Решить неравенство $\left|\frac{1}{x}-1\right|>x-2$.

Решение. Вновь воспользуемся вторым способом решения. Функция $f(x)=\frac{1}{x}-1$ определена при $x\ne 0$. Решением данного неравенства является объединение систем неравенств: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2 \\ x\ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left(\frac{1}{x}-1-x+2\right)\left(\frac{1}{x}-1+x-2\right)>0 \\ x\ge 2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Решим первое неравенство второй системы, тогда

$\frac{(-x^2+x+1)(x^2-3x+1)}{x^2}>0;\ \frac{(x^2-x-1)(x^2-3x+1)}{x^2}<0$. Ясно, что

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ и с учетом неравенства $x\ge 2$ получаем, что решением второй системы является промежуток $\left(2;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Решение первой системы очевидно, поэтому получаем ответ $(-\infty;\ 0)\cup\left(0;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Примечание: Неравенство можно решать и первым способом, но при этом приходится решать совокупность систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{1}{x}-1\ge 0\\ \dfrac{1}{x}-1>x-2\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{1}{x}-1<0\\ -\dfrac{1}{x}+1>x-2\end{cases}\end{array}\right.$$

, которая дает тот же самый результат.

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup\left(0;\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Пример 3. Решить неравенство $|\sin\ x|\le\cos\ x$.

Решение. Сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases}\sin^2 x-\cos^2 x\le 0\\ \cos x\ge 0\end{cases};\ \begin{cases}2\cos^2 x-1\ge 0\\ \cos x\ge 0\end{cases}.$$

При решении первого неравенства системы получаем:

$(\sqrt{2}\cos\ x-1)(\sqrt{2}\cos\ x+1)\ge 0$, а с учетом неравенства $\cos\ x\ge 0$ имеем $\sqrt{2}\cos\ x+1>0$, а поэтому $\cos x\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

Для сравнения предлагаем решить это неравенство другими возможными способами.

Пример 4. Решить неравенство $\left|\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right|\ge 1-\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Область определения неравенства есть промежуток $[-1;\ 1]$. Пусть $1-\sqrt{1-x^2}\le 0$, тогда неравенство является верным при всех x, принадлежащих области определения исходного неравенства. Решением рассматриваемого неравенства является $x=0$. Пусть $1-\sqrt{1-x^2}>0$, тогда $-x^2<0$, что верно при $x\ne 0$ и $x\in[-1;\ 1]$, тогда, после возведения обеих частей неравенства в квадрат, получаем $1+x-2\sqrt{1-x^2}+1-x\ge 1-2\sqrt{1-x^2}+1-x^2$, $x^2\ge 0$. Ясно, что второй из рассматриваемых случаев дает решение $[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]$.

Ответ: $[-1;\ 1]$.

Упражнения.

Решить неравенства.

1. $|3x+2|+x>1$.
2. $|x-1|\le 2x+1$.
3. $|x^2-x|\le x$.
4. $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|\ge x$.
5. $|\sin x|\ge \cos x$.
6. $\left|x-\sqrt{x-1}-1\right|\ge x-2$.

Ответы, решения:

1. $\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{4};\ +\infty\right)$.
2. $[0;\ +\infty]$.
3. $[0;\ 2]$.
4. $(-\infty;\ -1)\cup\left(-1;\ \sqrt{3}-1\right)$.
5. ***Решение.*** Если $\cos x\le 0$, то неравенство выполняется при $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\le x\le\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. Если $\cos x>0$, то $\sin^2 x\ge\cos^2 x$, $\cos 2x\le 0$ и $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\le 2x\le\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n$; $\dfrac{\pi}{4}+\pi n\le x\le\dfrac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.
   Далее необходимо учесть, что $\cos x>0$, тогда
   $\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ и $\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n<x\le\dfrac{7\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.
   Ответ: $\left[\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\dfrac{7\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in Z$.
6. ***Решение.*** Область определения неравенства $x\ge 1$. Если $1\le x\le 2$, то неравенство выполняется при всех x из этого промежутка.
   Пусть $x>2$, тогда, положим $\sqrt{x-1}=t$, $x=t^2+1$ $(t\ge 0)$, получим $|t^2-t|\ge t^2-1$. Ясно, что мы рассматриваем случай, когда $t^2-1>0$ $(x>2)$, тогда $(t^2-t-t^2+1)(t^2-t+t^2-1)\ge 0$; $(t-1)(2t^2-t-1)\le 0$; $(t-1)^2(2t+1)\le 0$. Так как при $t>0$ $2t+1>0$, $t=1$ и $x=2$.
   Ответ: $[1;2]$.

X
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВИДА
$|f_1(x)| + |f_2(x)| + ... + |f_n(x)| \le g(x)$
или $|f_1(x)| + |f_2(x)| + ... + |f_n(x)| \ge g(x)$

При решении неравенств указанного типа используется тот же прием, что и при решении уравнений, содержащих сумму модулей нескольких функций.

П р и м е р 1. Решить неравенство $|5x - 6| < x + 1$.

Решение. Так как $5x - 6 = 0$ при $x = 1,2$, то решением данного неравенства будет совокупность решений двух систем неравенств: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le 1{,}2\\ -5x+6 < x+1\end{cases}\\ \begin{cases}x > 1{,}2\\ 5x-6 < x+1\end{cases}\end{array}\right.$. Решив эти системы, получаем $\left(\frac{5}{6}; \frac{7}{4}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{5}{6}; \frac{7}{4}\right)$.

Примечание. Конечно, существует более простой вариант решения.

Например, можно решить систему неравенств $\begin{cases}5x-6 < x+1\\ 5x-6 > -x-1\end{cases}$;

$\begin{cases}x < \frac{7}{4}\\ x > \frac{5}{6}\end{cases}$, откуда $x \in \left(\frac{5}{6}; \frac{7}{4}\right)$.

П р и м е р 2. Решить неравенство $|x^2 - 2x| + |x - 1| \le x^2$.

Решение. Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$. Эти значения разбивают числовую прямую на четыре промежутка, и следовательно, нам будет необходимо решить четыре системы неравенств:

1) $\begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - 2x - x + 1 \le x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 0 \\ x \ge \frac{1}{3} \end{cases}$. Система решений не имеет.

2) $\begin{cases} 0 < x \le 1 \\ -x^2 + 2x - x + 1 \le x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} 0 < x \le 1 \\ 2x^2 - x - 1 \ge 0 \end{cases}$. Откуда $x = 1$.

3) $\begin{cases} 1 < x \le 2 \\ -x^2 + 2x + x - 1 \le x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} 1 < x \le 2 \\ 2x^2 - 3x + 1 \ge 0 \end{cases}$. Откуда $1 < x \le 2$.

4) $\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 2x + x - 1 \le x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 2 \\ x \ge -1 \end{cases}$. Откуда $x > 2$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

Упражнения.

Решить неравенства.

1. $|4x - 1| + 2x - 4 \le 0$.
2. $|3 - x| - |x - 2| \le 5$.
3. $|2x - 6| + |4 - x| \le |x - 2|$.
4. $|x^2 + 2x| + |x - 2| > 4$.
5. $|\sin x| - |\cos x| \le 1$.
6. $\sqrt{x^2 - 3x} \ge |x - 4| + |x - 3|$.

Ответы, решения:

1. $\left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{6}\right]$.
2. $(-\infty; +\infty)$.
3. $[3; 4]$.
4. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
5. Выполним равносильные преобразования: $|\sin x| \le 1 + |\cos x|$; $\sin^2 x \le 1 + |2\cos x| + \cos^2 x$; $2\cos^2 x + 2|\cos x| \ge 0$. Последнее неравенство выполняется при $x \in R$.

6. Область определения неравенства $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$. Выражения, входящие в неравенство, обращаются в нуль при $x=0$, $x=3$ и $x=4$. Исходя из этого, рассмотрим решение неравенства на трех промежутках:

а) $\begin{cases} x\le 0 \\ \sqrt{x^2-3x}\ge -2x+7 \end{cases}$. Если $x\le 0$, то $-2x+7\ge 0$, а поэтому $x^2-3x\ge 4x^2-28x+49$; $3x^2-25x+49\le 0$. Последнее неравенство имеет решение $\left[\frac{25-\sqrt{37}}{2};\frac{25+\sqrt{37}}{2}\right]$ с учетом $x\le 0$ система неравенств решения не имеет.

б) $\begin{cases} 3\le x\le 4 \\ \sqrt{x^2-3x}\ge -x+4+x-3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3\le x\le 4 \\ \sqrt{x^2-3x}\ge 1 \end{cases}$. Решение второго неравенства системы дает $x\in\left(-\infty;\ \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right)$, а с учетом первого двойного неравенства $x\in\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2};\ 4\right]$.

в) $\begin{cases} x>4 \\ \sqrt{x^2-3x}\ge 2x-7 \end{cases}$. Если $x>4$, то $2x-7>0$, и неравенство системы равносильно неравенству $x^2-3x\ge 4x^2-28x+49$, $3x^2-25x+49\le 0$, решением которого является $x\in\left(\frac{25-\sqrt{37}}{6};\ \frac{25+\sqrt{37}}{6}\right)$. С учетом того, какой промежуток мы рассматриваем, получаем $x\in\left(4;\ \frac{25+\sqrt{37}}{6}\right]$.

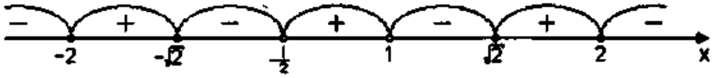
Ответ: $\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2};\ \frac{25+\sqrt{37}}{6}\right]$.

XI
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛИ, МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

При решении неравенства методом интервалов его приводят к виду $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$ (неравенства могут быть и нестрогими). Находят область определения функции $f(x)$, ее нули. Эти нули разбивают область определения функции $f(x)$ на промежутки, в каждом из которых функция непрерывна и не обращается в нуль, тогда она сохраняет на каждом из промежутков свой знак неизменным.

П р и м е р. Решить неравенство $\dfrac{1-|x^2-3|}{|2x^2-x|-1} \le 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1-|x^2-3|}{|2x^2-x|-1}$. Найдем нули функции: $|x^2 - 3| = 1$, откуда $x_1 = -2$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = \sqrt{2}$; $x_4 = 2$. Далее находим точки разрыва (это нули знаменателя): $|2x^2 - x| = 1$, откуда $x_5 = -0{,}5$; $x_6 = 1$. Покажем точки разрыва и нули функции на числовой прямой. Ясно, что на всех промежутках, получившихся при разбиении этими точками, функция $f(x)$ сохраняет свой знак:



Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-\sqrt{2}; -0{,}5) \cup (1; \sqrt{2}\,] \cup [2; +\infty)$.

Упражнения.

Решить неравенства методом интервалов.

1. $\dfrac{1-x^2}{|x-4|-2} \ge 0.$

2. $\dfrac{|x-3|-2x}{x-2|x+1|} \le 0.$

3. $\dfrac{|x^2-x|-|x|}{|x-2|+2x}>0$.

4. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5|x|+4}\geq 0$.

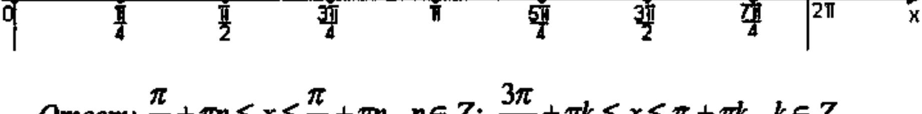
5. $(x^2-|x|-6)(||x-2|-1|-3)>0$.

6. $(|\sin x-\cos x|-1)(|\sin x|-|\cos x|)\leq 0$.

Ответы, решения:

1. $[-1;\ 1]\cup(2;\ 6)$.
2. $(-\infty;\ 1]$.
3. $(-2;\ 0)\ \cup\ (2;\ +\infty)$.
4. $(-\infty;\ -4)\cup[-3;\ -2]\cup(-1;\ 1)\cup(4;\ +\infty)$.
5. $(-\infty;\ -3)\cup(-2;\ 3)\cup(6;\ +\infty)$.
6. ***Решение.***

Пусть $f(x)=(|\sin x-\cos x|-1)(|\sin x|-|\cos x|)$. $D(f)=R$. Решаем неравенство на любом отрезке длиной 2π, например, на отрезке $[0;\ 2\pi]$. $f(x)=0$, если $|\sin x-\cos x|=1$ или $|\sin x|=|\cos x|$. После возведения в квадрат первого уравнения получаем ему равносильное $(\sin x-\cos x)^2=1$; $1-\sin 2x=1$; $\sin 2x=0$; $x=\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z$. Отрезку $[0;\ 2\pi]$ принадлежат корни: $0;\ \dfrac{\pi}{2};\ \pi;\ \dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi$. Уравнение $|\sin x|=|\cos x|$ можно решить и возведением в квадрат обеих частей уравнения, и делением на $|\cos x|\neq 0$, $|\mathrm{tg}\, x|=1$, $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. Отрезку $[0;\ 2\pi]$ принадлежат корни $\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{5\pi}{4};\ \dfrac{7\pi}{4}$.



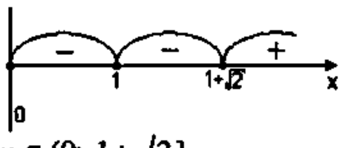
Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi n\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ \dfrac{3\pi}{4}+\pi k\leq x\leq\pi+\pi k,\ k\in Z$.

XII
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

В этом разделе будет рассмотрен аналитический способ решения. В дальнейшем авторы подробно остановятся и на графическом способе решения.

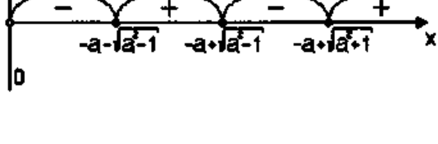
П р и м е р 1. Решить неравенство $|x + 2a| \le \dfrac{1}{x}$.

Решение. При $x \le 0$ неравенство решений не имеет, поэтому далее считаем, что $x > 0$, но тогда исходное неравенство равносильно неравенству $|x^2 + 2ax| \le 1$. После возведения в квадрат обеих частей последнего неравенства получаем ему равносильное неравенство $(x^2 + 2ax - 1)(x^2 + 2ax + 1) \le 0$. Пусть $f(x) = (x^2 + 2ax + 1)(x^2 + 2ax - 1)$ и $D(f) = R_+$. Нули f: $x = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, $x = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}$. Корень $x = -a - \sqrt{a^2 + 1}$ не удовлетворяет условию $x > 0$. Очевидно, что $x = -a + \sqrt{a^2 + 1} > 0$ при всех $a \in R$. Корни $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ удовлетворяют условию $x > 0$ только при $a \le -1$. Рассмотрим случай $a = -1$. В этом случае нули функции f: $x = 1 + \sqrt{2}$ и $x = 1$, причем последний корень кратности 2.



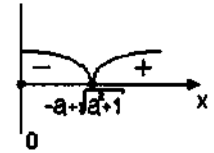
Итак, при $a = -1$ $x \in (0;\ 1 + \sqrt{2}]$.

Пусть $a < -1$. Имеем ситуацию, представленную на рисунке:



Ясно, что при $a<-1$ $0<x<-a-\sqrt{a^2-1}$; $-a+\sqrt{a^2-1}\le x\le -a+\sqrt{a^2+1}$.

Далее случай $a>-1$. Оба корня $x=-a\pm\sqrt{a^2-1}$ не удовлетворяют условию $x>0$.



При $a>1$ $0<x\le -a+\sqrt{a^2+1}$.

Ответ: при $a<-1$ $0<x<-a-\sqrt{a^2-1}$; $-a+\sqrt{a^2-1}\le x\le -a+\sqrt{a^2+1}$;

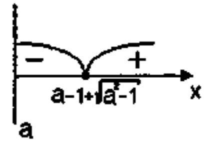
при $a=-1$ $0<x\le 1+\sqrt{2}$, при $a>-1$ $0<x\le -a+\sqrt{a^2+1}$.

Пример 2. Для каждого значения параметра a решить неравенство $2\,|\,x-a\,|<2ax-x^2-2$.

Решение.

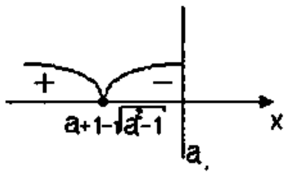
Введем обозначение $f(x)=2\,|\,x-a\,|-(2ax-x^2-2)$. Необходимо решить неравенство $f(x)<0$. $D(f)=R$. Находим нули функции.

1) $\begin{cases} x\ge a \\ 2x-2a-2ax+x^2+2=0 \end{cases}$. После решения уравнения системы получим $x=a-1\pm\sqrt{a^2-1}$. Найдем те значения a, при которых $x\ge a$. $a-1+\sqrt{a^2-1}\ge a$, откуда $a\le-\sqrt{2}$ и $a\ge\sqrt{2}$; при этих значениях $a>0$ и $a^2-1>0$. Неравенство $-a-1-\sqrt{a^2-1}\ge -a$ выполняется при $a>\sqrt{2}$ $4a^2-4a+1>a^2-1$, $3a^2-4a+2a>0$, и т. к. $D<0$, то последнее неравенство выполняется при всех $a>\sqrt{2}$. Пусть $a\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$. Итак, при $a>\sqrt{2}$ $x=a-1\pm\sqrt{a^2-1}$, и оба корня не меньше a. $x\in[a;a-1+\sqrt{a^2-1}]$.



2) Пусть теперь $x \le a$, тогда $-2x + 2a - 2ax + x^2 + 2 = 0$, $x^2 - 2x(1 + a) + 2(2 + a) = 0$.

Очевидно, что неравенство $a+1+\sqrt{a^2-1} \le a$ не выполняется ни при каких a, а неравенство $a+1-\sqrt{a^2-1} \le a$ вновь выполняется при $a < -\sqrt{2}$ и при $a > \sqrt{2}$.



Ясно, что $x \in (a+1-\sqrt{a^2-1};\ a]$.

Ответ: при $|a| \le \sqrt{2}$ неравенство решений не имеет;

при $|a| > \sqrt{2}$ $\quad a-\sqrt{a^2-1}+1 < x < a+\sqrt{a^2-1}-1$.

Упражнения.

Решить методом интервалов неравенства:

1. $x^2 - |x| + a \ge 0$.
2. $x^2 \le |x - a|$.

В дальнейшем мы познакомимся с графическим методом решения неравенств, который является более наглядным и в ряде случаев дает более простое решение.

Решения, ответы:

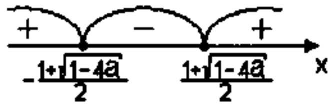
1. ***Решение.*** Пусть $f(x) = x^2 - |x| + a$. $D(f) = R$.
Находим нули функции f:

$$|x|^2 - |x| + a = 0,\ |x| = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}.$$

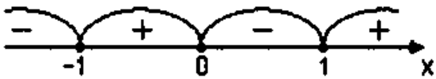
Если $1 - 4a \le 0$, $a \ge 0{,}25$, то квадратные трехчлены $x^2 - x + a$ и $x^2 + x + a$ неотрицательны. В этом случае $x \in R$.

Если $a < 0{,}25$, то нули $|x| = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$. Если $\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2} < 0$, то есть $a<0$, то уравнение $|x|=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ (*) корней не имеет

и $x\in\left(-\infty;\,-\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\,+\infty\right)$.



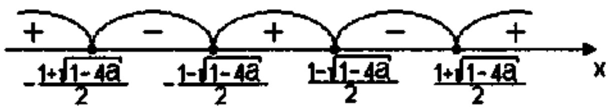
Если $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}=0$, т. е. $a=0$, то $x=-1$, $x=1$, $x=0$.



Ясно, что $x\in[-1;0]\cup[1;+\infty)$.

Если $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}>0$, то $0<a<0{,}25$ и уравнение (*) имеет два

корня: $x=\pm\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$.



Если $0<a<0{,}25$, то

$$\in\left(-\infty;-\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right]\cup\left[-\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\,+\infty\right).$$

Ответ: при $a<0$ $x\in\left(-\infty;\,-\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\,+\infty\right)$;

при $a=0$ $x \cup [-1;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$;

при $0<a<0{,}25$

$$x \in \left(-\infty;\ -\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\ \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\ +\infty\right)$$

при $a \geq 0{,}25$ $x \in R$.

2. ***Решение.***

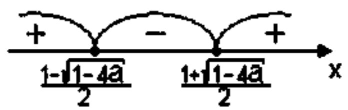
1) $\begin{cases} x \geq a \\ x^2 \leq x-a \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq a \\ x^2-x+a \leq 0 \end{cases}$. Если $D<0$, т. е. $1-4a<0$, $a>0{,}25$, то неравенство решений не имеет. Если $D=0$, т. е. $a=0{,}25$; $x=0{,}5$ и условие первого неравенства системы выполняется.

Если $D>0$, тогда $a<0{,}25$ и уравнение $x^2-x+a=0$ имеет два корня: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$.

Покажем, что оба корня при $a<0{,}25$ больше a:

$\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}>a$; $\sqrt{1-4a}>2a-1$, что верно при указанных a.

$\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}>a, \sqrt{1-4a}<-2a+1$. $1-2a>0$ при $a<0{,}25$ и после возведения в квадрат получаем $1-4a<1-4a+4a^2$, которое очевидно.



Значит, если $a<0{,}25$, то $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$

и $x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right]$.

2) $\begin{cases} x < a \\ x^2 + x - a \le 0 \end{cases}$. Если $D < 0$, т. е. $1 + 4a < 0$, $a < -0{,}25$, то второе неравенство системы не выполняется ни при каких значениях x. Если $D = 0$, а $a = -0{,}25$, то $x = -0{,}5$ и первое неравенство системы выполняется. Если $D > 0$, т. е. $a > -0{,}25$, то квадратный трехчлен имеет два корня: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.

$\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} < a$ очевидное неравенство при $a > -0{,}25$.

Выясним, при каких значениях a $\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} < a$, для чего решим систему неравенств:

$\begin{cases} a > -0{,}25 \\ \sqrt{1+4a} < 2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -0{,}25 \\ 1+4a < 4a^2+4a+1 \end{cases}$, то есть второй корень должен также быть меньше a.

Тогда $x \in \left[\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$.

Ответ: при $a = 0{,}25$ $x = 0{,}5$;
при $a = -0{,}25$ $x = -0{,}5$;
при $a < 0{,}25$ неравенство решений не имеет;
при $-0{,}25 < a < 0{,}25$

$$x \in \left[\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}; \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}; \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right];$$

при $a > 0{,}25$ $x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right]$.

XIII
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ И УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ

Выясним, как можно выполнять построение графиков функции вида $y = |f(x)|$.

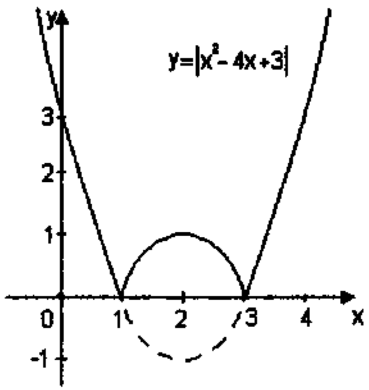
1. Построение графиков функции вида $y = |f(x)|$.

Можно воспользоваться определением модуля и построить графики функции $y = f(x)$ при тех значениях x, при которых $f(x) \geq 0$ и $y = -f(x)$; при всех тех значениях x, для которых выполняется неравенство $f(x) \leq 0$.

Например, построим график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$.

а) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, если $x^2 - 4x + 3 = 0$ и $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$;

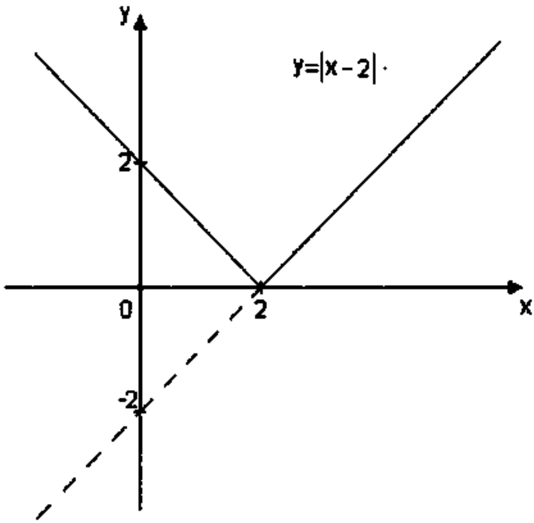
б) $f)x) = -(x^2 - 4x + 3)$, если $x^2 - 4x + 3 < 0$ и $x \in (1; 3)$.



Такой способ занимает много времени и требует решения неравенств. Возможен другой вариант построения графика функции $y = |f(x)|$. Можно заметить, что достаточно построить график функции $y = f(x)$ и отобразить симметрично относительно оси Ox ту часть графика, которая расположена ниже оси, оставив верхнюю часть графика без изменения.

П р и м е р. Построить график функции $y = |x-2|$.

Строим график функции $y = x - 2$ и отображаем ту часть графика, которая расположена ниже оси Ox, симметрично относительно оси.



Замечания:

а) График функции $y = |x - 2|$ получается из графика функции $y = |x|$ путем параллельного переноса этого графика вдоль оси Ox на две единицы вправо.

б) Можно найти точку излома графика функции $y = |x - 2|$ (2; 0) и вычислить значения функции в двух точках при $x > 2$ и $x < 2$. Далее, соединяя эти точки с точкой излома, получим искомый график.

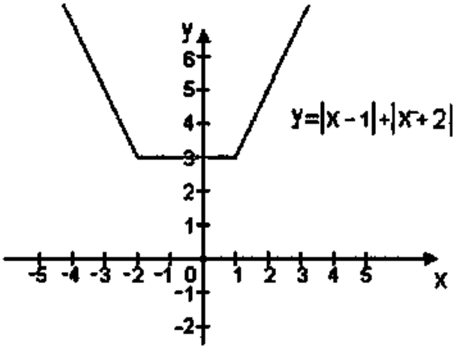
2. Построение графиков функций вида

$$f(x) = |k_1x + b_1| + |k_2x + b_2| + ... + |k_n + b_n|.$$

а) Можно, пользуясь определением модуля, рассмотреть функцию f(x) на каждом из промежутков, на которые нули подмодульных выражений разбивают числовую прямую, а затем выполнить построения. Например, рассмотрим построение графика функции $y = |x - 1| + |x + 2|$.

Здесь нули подмодульных выражений $x = 1$ и $x = -2$.

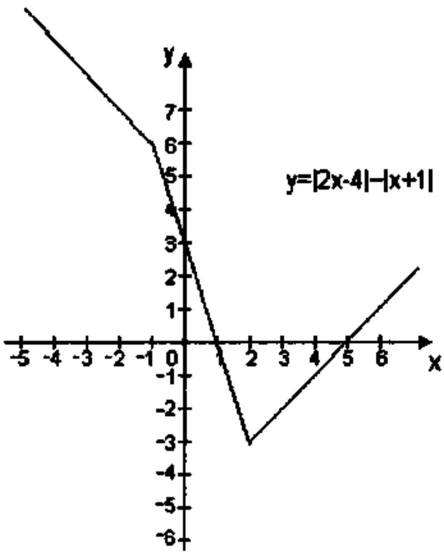
а) $\begin{cases} x \le 2 \\ y = -x + 1 - x - 2 = -2x - 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -2 < x \le 1 \\ y = -x + 1 + x + 2 = 3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x > 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$



Из самого метода построения следует, что для построения графика подобного типа достаточно найти точки излома, а затем вычислить значения функции в точках слева и справа от точек излома, а затем соединить полученные точки с точками излома и точки излома между собой.

Построим график функции $y = |\,2x - 4\,| - |\,x + 1\,|$.

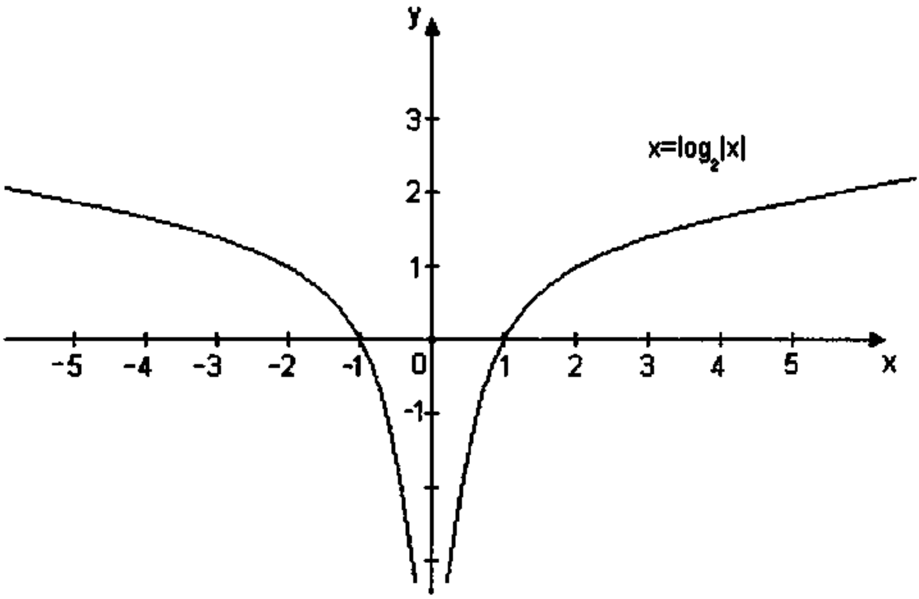
Абсциссы точек излома графика функции находим из уравнений $2x - 4 = 0$ и $x + 1 = 0$. $y(2) = -3$, $y(-1) = 6$. Дополнительно найдем $y(3) = -2$ и $y(-2) = 7$. Соединив полученные точки, получим график:



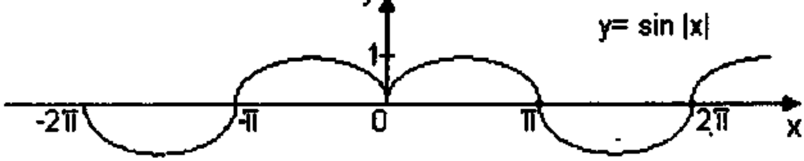
3. Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$.

Функция $y = f(|x|)$ четная, поскольку $f(|-x|) = f(|x|)$, поэтому достаточно построить график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$, а затем отобразить построенную часть симметрично оси Oy. Конечно, вместо этого можно строить график функции $y = f(-x)$ при $x < 0$, что несколько сложнее с технической точки зрения.

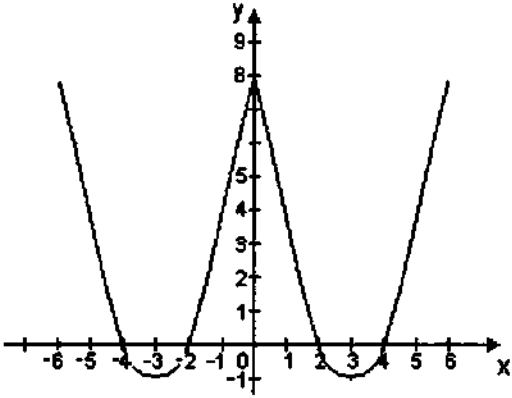
П р и м е р 1. Построить график функции $y = \log_2|x|$.



П р и м е р 2. Построить график функции $y = \sin|x|$.



П р и м е р 3. Построить график функции $y = x^2 - 6|x| + 8$.



4. Построение графиков функций вида $y = |f(|x|)|$.

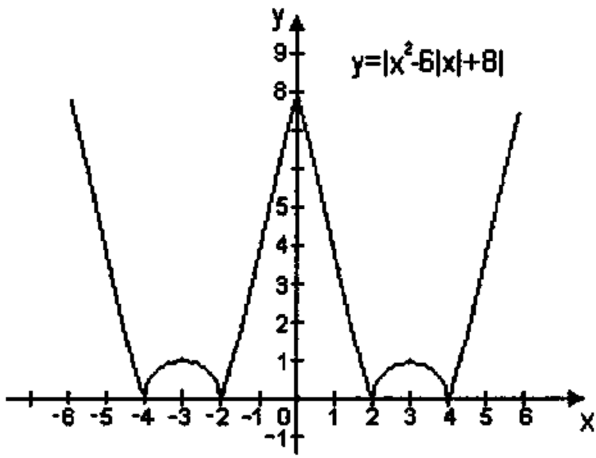
Схема построения графика этой функции может быть такой:

а) Строим график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$.

б) Строим вторую часть графика, отобразив построенную часть графика симметрично относительно оси *Oy*.

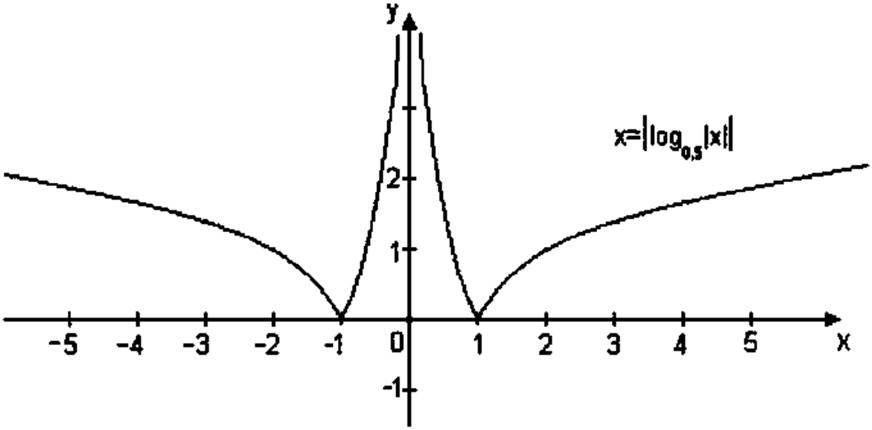
в) На полученном графике часть, расположенную ниже оси *Ox*, отображаем симметрично вверх, оставив верхнюю часть графика без изменения.

П р и м е р 1. Построить график функции $y = |x^2 - 6|x| + 8|$.



П р и м е р 2. Построить график функции $y = |\log_{0,5}|x||$.

Решение. Заметим, что $|\log_{0,5}x| = |\log_2 x|$, поэтому будем строить график функции $y = |\log_2|x||$.

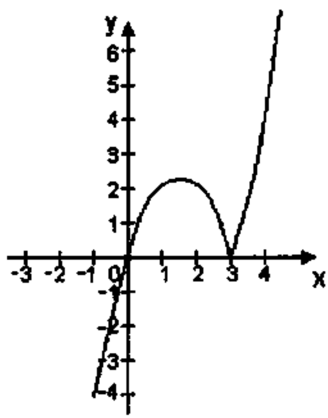


5. Построение некоторых других графиков функций, содержащих знак модуля.

П р и м е р 1. Построить график функции $f(x) = x|x - 3|$.

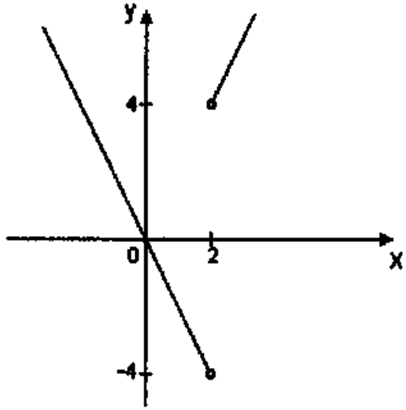
Решение. Пользуясь определением модуля, представим данную функцию двумя аналитическими выражениями:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x; x \geq 3 \\ -x^2 + 3x; x < 3 \end{cases}.$$



Пример 2. Построить график функции $f(x) = 2x\dfrac{|x-2|}{x-2}$.

Решение. Если $x > 2$, то $f(x) = 2x$. Если $x < 2$, то $f(x) = -2x$. При $x = 2$ функция не определена. Говорят, что при $x = 2$ функция терпит разрыв.

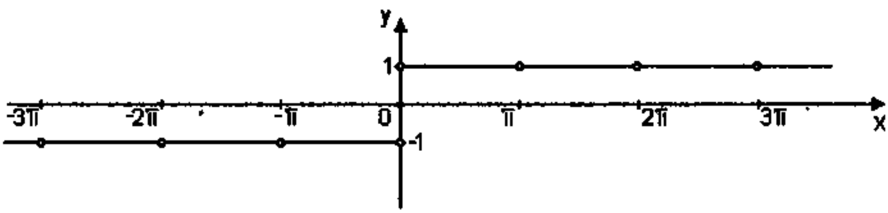


Пример 3. Построить график функции $y = \dfrac{\sin|x|}{\sin x}$.

Решение. Областью определения функции y является вся числовая ось, за исключением точек $x = \pi k$, $k \in Z$.

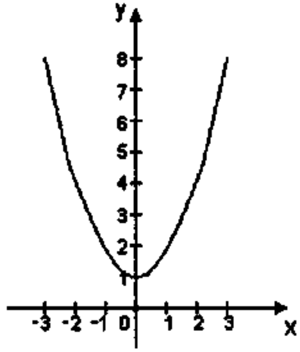
При $x > 0$, $x \neq \pi k$, $k \in N$ $\quad y = \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1$,

при $x < 0$, $x \neq \pi k$, $(k < 0, k \in Z)$ $\quad y = \dfrac{\sin(-x)}{\sin x} = -1$.



П р и м е р 4. Построить график функции $y = 2^{|x|}$.

Решение. При $x \geq 0$ $y = 2^x$; при $x < 0$ $y = 0{,}5^x$. Впрочем, можно обратить внимание на четность функции, и следовательно, симметричность графика функции относительно оси Oy.

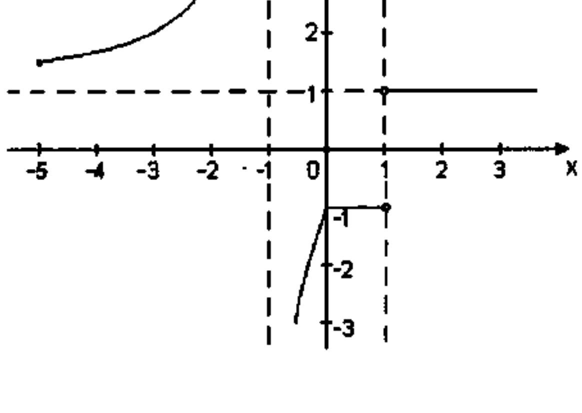


П р и м е р 5. Построить график функции $y = \dfrac{|x-1|}{|x|-1}$.

Решение. Очевидно, что при $x = \pm 1$ функция терпит разрыв.

При $x < 0$, $x \neq -1$ имеем функцию $y = \dfrac{-(x-1)}{-(x+1)} = \dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$;

при $0 \leq x < 1$ $y = -\dfrac{x-1}{x-1} = -1$; при $x > 1$ $y = 1$.



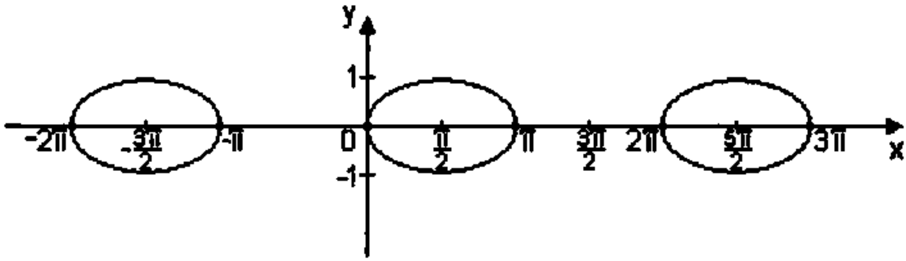
3 Заказ 1198

6. Построение графиков уравнений вида $|y| = f(x)$.

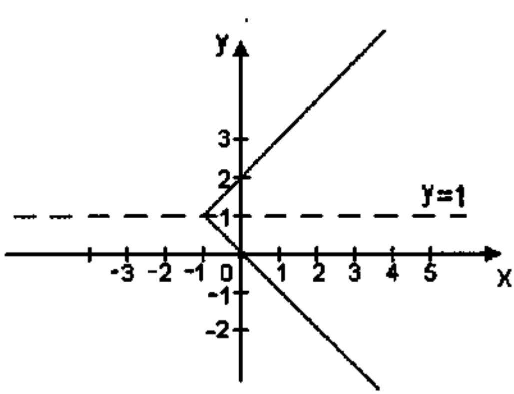
Из определения модуля следует, что $f(x) \geq 0$, и если $y \geq 0$, $y = f(x)$, а если $y < 0$, то $y = -f(x)$. Итак, ясно, что график симметричен относительно оси Ox. Строим график функции $y = f(x)$ для случая $y \geq 0$, а затем график отображаем симметрично относительно оси Ox.

П р и м е р 1. Построить график уравнения $|y| = \sin x$.

Решение. $\begin{cases} y=\sin x \\ y\geq 0 \\ \sin x\geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-\sin x \\ y\leq 0 \\ \sin x\geq 0 \end{cases}$. Построим график по изложенной выше схеме с учетом того, что $x\in[2\pi n;\pi+2\pi n]$, $n\in Z$.

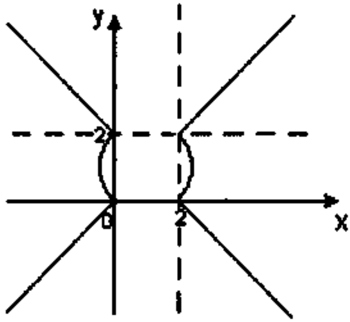


П р и м е р 2. Построить график уравнения $|y - 1| = x + 1$.
Решение. Если $y \geq 1$, то $y - 1 = x + 1$, $y = x + 2$ при $x \geq -1$;
если $y < 1$, то $y - 1 = -x - 1$, $y = -x$ при $x \geq -1$.
График симметричен относительно прямой $y = 1$.



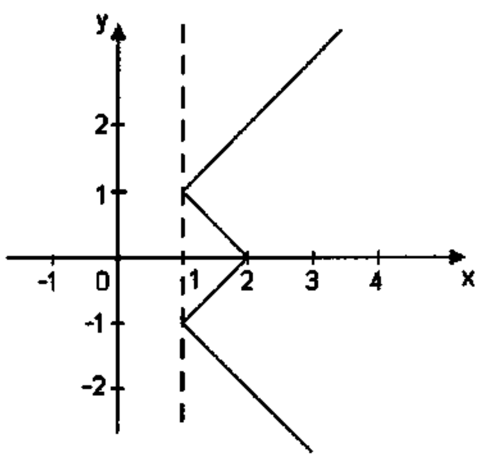
П р и м е р 3. Построить график уравнения $|y^2 - 2y| = x^2 - 2x$.

Решение. $\begin{cases} y^2-2y\ge 0 \\ x^2-2x\ge 0 \\ y^2-2y=x^2-2x \end{cases}$; $\begin{cases} y^2-2y<0 \\ x^2-2x\ge 0 \\ -y^2+2y=x^2-2x \end{cases}$. Построим график с учетом того, что $x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. Очевидно, что он получается при комбинации графиков функций $y = x$ и $y = -x + 2$, а также окружности $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ с центром в точке (1; 1) радиуса $\sqrt{2}$.



П р и м е р 4. Построить график уравнения $||y| - 1| = x - 1$.

Решение. Очевидно, что $x \ge 1$, тогда график будет расположен правее прямой $x = 1$. Он будет являться комбинацией графиков уравнений $|y| = x$ и $|y| = 2 - x$ при уже указанных значениях x.



7. Построение графиков уравнений вида $|y| = |f(x)|$.

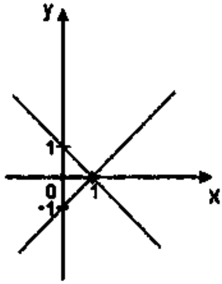
Исходное уравнение равносильно совокупности: $y^2 - f^2(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = -f(x) \end{array}\right.$$

Для построения графика уравнения достаточно построить график функции $y = f(x)$, а затем к построенному графику добавить уже построенный график, отображенный симметрично относительно оси Ox.

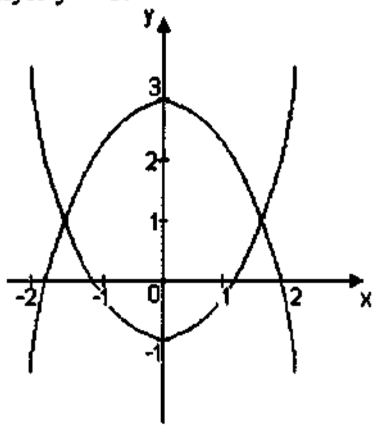
Пример 1. Построить график уравнения $|y| = |x - 1|$.

Решение. Строим график функции $y = x - 1$, а затем ему симметричный относительно оси Ox. График имеет осью симметрии прямую $y = 0$.



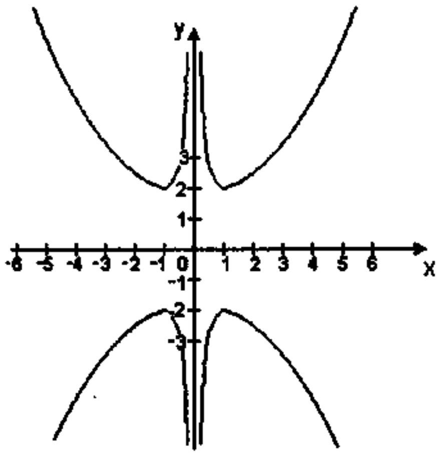
Пример 2. Построить график уравнения $|y - 1| = |x^2 - 2|$.

Решение. Строим графики функций $y - 1 = x^2 - 2$ и $y - 1 = 2 - x^2$, т. е. графики функций $y = x^2 - 1$ и $y = 3 - x^2$. График уравнения имеет осью симметрии прямую $y = 1$.



П р и м е р 3. Построить график уравнения $|y| = \left|x + \dfrac{1}{x}\right|$.

Решение. Построим график функции $y = x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+1}{x}$. Построение можно провести, сделав исследование дробно-рациональной функции либо сложением графиков линейной функции и обратной пропорциональности. Оба способа построения графика функции $y = x + \dfrac{1}{x}$ подробно описаны во всех школьных учебниках.

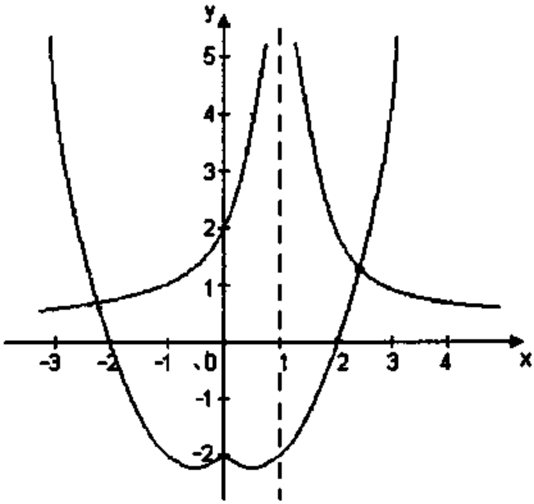


XIV
ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ

Обратим внимание читателей на то, что графические способы решения уравнений и неравенств, как правило, являются приближенными. Они дают возможность сделать оценку промежутков, в которых находятся возможные решения, и указать количество корней. Точность решения зависит от выбранного масштаба, толщины карандаша или ручки, углов, под которыми пересекаются линии на чертеже, Напомним, что измерения могут быть произведены с точностью до половины цены деления измерительного прибора (линейки).

Пример 1. Сколько корней имеет уравнение $\frac{2}{|x-1|}=x^2-|x|-2$? В каких промежутках они заключены?

Решение. В одной системе координат строим графики функций $y=\frac{2}{|x-1|}$ и $y = x^2 - |x| - 2$ (см. раздел XIII).



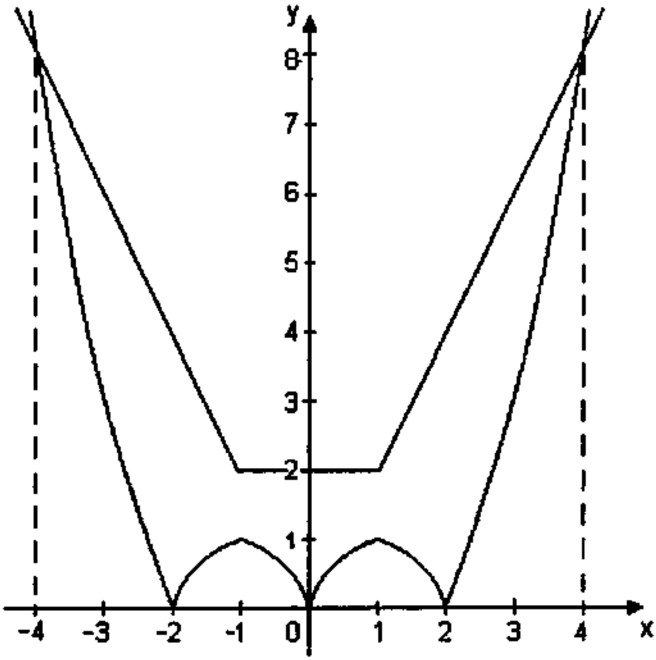
Из рисунка видно, что уравнение имеет 2 корня (графики пересекаются в двух точках). Сравнение значений обеих функций при $x=-3$, $x=-2$, $x=2$ и $x=3$ дает возможность указать на то, что корни расположены на промежутках $(-3; -2)$ и $(2; 3)$.

Ответ: 2 корня; один — на промежутке $(-3; -2)$, второй — на промежутке $(2; 3)$.

Пример 2. Решить уравнение $|x^2-2|x||=|x-1|+|x+1|$.

Решение. Строим график функции $f(x)=x^2-2|x|$ при $x \geq 0$, то есть график функции $y=x^2-2x$, а затем отображаем полученный график симметрично оси Oy ввиду четности функции $f(x)$. Далее строим график функции $h(x)=|x^2|-2|x|$, отобразив часть графика функции $f(x)$, лежащую ниже оси Ox, симметрично относительно этой оси вверх.

Для построения графика функции $g(x)=|x-1|+|x+1|$ находим точки излома $(1; 2)$; $(-1; 2)$. Затем берем точки, принадлежащие графику левее и правее точек излома, например, $(-2; 4)$ и $(2; 4)$. Последовательно соединив полученные точки, получаем график функции $g(x)$.



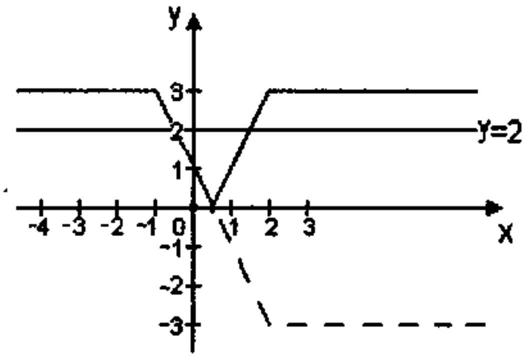
Точки пресечения двух графиков дают решение уравнения.

Ответ: ± 4.

Пример 3. Решить графически неравенство $||x-2|-|x+1|| \le 2$.

Решение. Сначала построим график функции $f(x) = |x-2|-|x+1|$. Найдем точки излома $(2; -3)$ и $(-1; 3)$. Найдем координаты двух точек, лежащих слева и справа от точек излома, например, $(3; -3)$ и $(-2; 3)$. Соединив последовательно полученные точки, получим вспомогательный график. Далее получим график функции $g(x) = ||x-2|-|x+1||$, отобразив симметрично относительно оси Ox часть графика функции $f(x)$, лежащую ниже оси Ox, вверх.

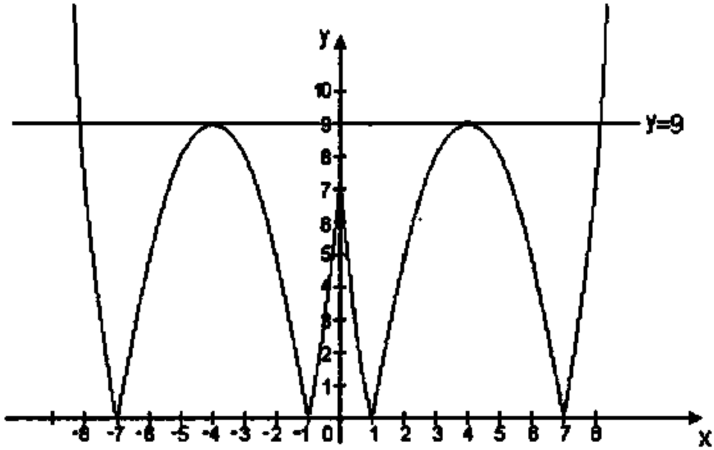
Прямая $y = 2$ параллельна оси Ox. Часть графика функции $g(x)$, лежащая ниже этой прямой, дает решение неравенства.



Ответ: $[-0{,}5; 1{,}5]$.

Пример 4. Решить графически неравенство $|x^2 - 8|x| + 7| \le 9$.

Решение. По схеме, описанной в предыдущих примерах, строим график функции $y = |x^2 - 8|x| + 7|$. Укажем в той же системе координат прямую $y = 9$. Очевидно, что часть графика функции $f(x)$, лежащая на этой прямой и ниже, даст решение неравенства: $[\approx -8{,}25; \approx 8{,}25]$. Еще раз отметим, что графически мы можем получить только приближенный ответ; точный ответ дает только аналитическое решение: $x > 7$, тогда $x^2 - 8x + 7 = 9$, $x^2 - 8x - 2 = 0$, $x = 4 + 3\sqrt{2}$. И в силу симметрии графика относительно оси Oy $x = -4 - 3\sqrt{2}$.



Ответ: $[-4-3\sqrt{2};\ 4+3\sqrt{2}]$.

XV
ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПАРАМЕТРОВ

Использование графиков функций и уравнений значительно упрощает решение уравнений и неравенств с параметрами.

Пример 1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{2|x|-x^2}=a$?

Решение. Функция $f(x)=\sqrt{2|x|-x^2}$ четная. $D(f):[-2;\ 2]$. Строим график функции $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ и отображаем его симметрично относительно оси Oy.

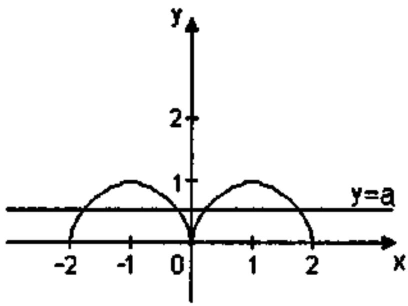


Рис. 1

Прямая $y=a$ параллельна оси Ox. Из рисунка видно, что при $a<0$ и $a>1$ уравнение корней не имеет; при $a=0$ уравнение имеет три корня; при $0<a<1$ уравнение имеет четыре корня; при $a=1$ уравнение имеет два корня.

Пример 2. Решить уравнение $||x+1|-2|=a$.

Решение. Строим график функции $y=|x+1|-2$. Точка $(-1;\ -2)$ является точкой излома графика. По уже описанной методике строим график этой функции, и, отобразив часть графика, лежащую ниже оси Ox симметрично относительно этой оси вверх, получаем график функции $g(x) = \left| |x+1| - 2 \right|$.

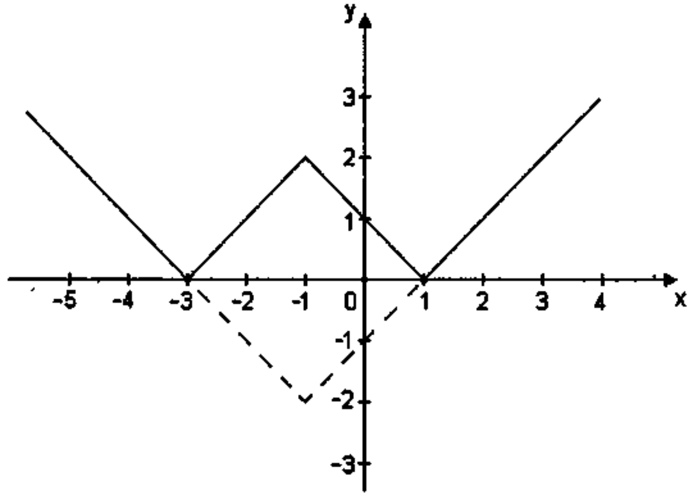


Рис. 2

Из рисунка видно, что при $a < 0$ уравнение корней не имеет; при $a = 0$ уравнение имеет два корня $x = 1$ и $x = -3$.

При $0 < a < 2$ уравнение имеет четыре корня:

$$\left[\begin{array}{l} x-1=a \\ -x+1=a \\ x+3=a \\ -x-3=a \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=a+1 \\ x=1-a \\ x=a-3 \\ x=-a-3 \end{array}\right.;$$

при $a = 2$ уравнение имеет три корня, один из которых равен -1, найдем два других:

$$\left[\begin{array}{l} x-1=2 \\ -x-3=2 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5 \end{array}\right.;$$

при $a > 2$ уравнение имеет два корня:

$$\left[\begin{array}{l} x-1=a \\ -x-3=a \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=a+1 \\ x=-a-3 \end{array}\right..$$

Советуем это уравнение решить и чисто аналитическим способом.

Пример 3. Решить неравенство $|x| + |x - a| \le 2$.

Решение. Строим график функции $y = |x| + |x - a|$. Если $x = 0$, то $y = |a|$, если $x = a$, то $y = |a|$. Имеем две точки излома графика: $(0; |a|)$ и $(a; |a|)$.

Пусть $a > 0$, точки излома $(0; a)$ и $(a; a)$, тогда при $x = 2a$ $y = 3|a| = 3a$; при $x = -a$ $y = 3|-a| = 3|a| = 3a$. Покажем график функции на рис. 3.

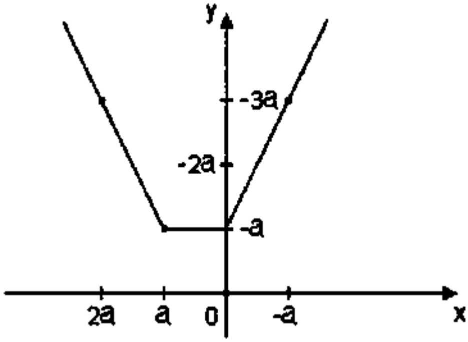


Рис. 3

Пусть $a < 0$, точки излома $(0; -a)$ и $(a; -a)$, тогда при $x = 2a$ $y = -3a$; при $x = -a$ $y = -3a$. Покажем график функции на рис. 4.

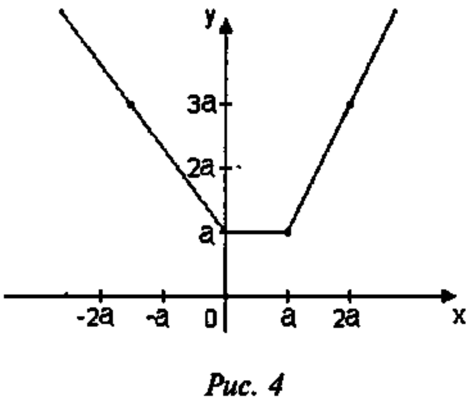


Рис. 4

Прямая $y = 2$ параллельна оси Ox, тогда, очевидно, что при $|a| > 2$ неравенство решения не имеет.

При $a = 2$ $x \in [0; 2]$, при $a = -2$ $x \in [-2; 0]$.

При $|a| < 2$ решение должно удовлетворять двойному неравенству $x_1 < x < x_2$, где x_1 определяем из уравнения $-x - x + a = 2$, $x_1 = 0,5(a - 2)$, а x_2 определяем из уравнения $x + x - a = 2$, $x_2 = 0,5(a + 2)$.

Замечание: Данное неравенство можно решить иначе. Запишем его в виде $|x - a| \leq 2 - |x| \Leftrightarrow |x| - 2 \leq a - x \leq 2 - |x| \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + |x| - 2 \leq a \leq 2 + x - |x|$.

Если $x \geq 0$, то $2x - 2 \leq a \leq 2$, если $x < 0$, то $-2 \leq a \leq 2 + 2x$. Очевидно, что $-2 \leq a \leq 2$. $a = 2 + 2x_1$, $x_1 = 0,5(a - 2)$, $a = 2 + 2x_2$, $x_2 = 0,5(a + 2)$. Покажем решение на рис. 5.

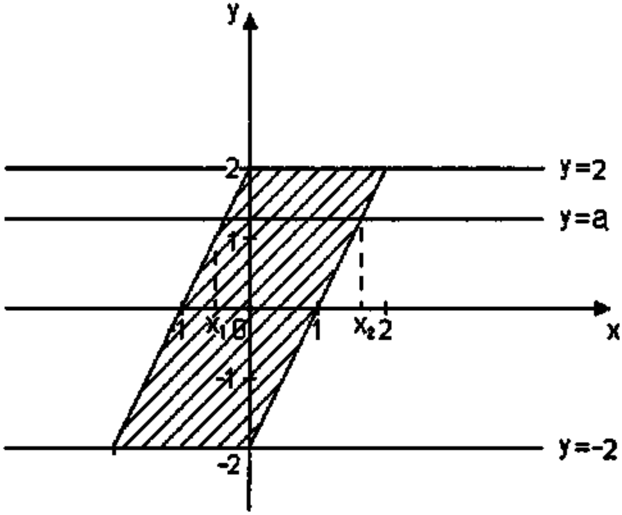


Рис. 5

$x \in [0,5(a - 2); 0,5(a + 2)]$.

Ответ: при $|a| \leq 2$ $x \in [0,5(a - 2); 0,5(a + 2)]$; при $|a| > 2$ решений нет.

Пример 4. Изобразить множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих неравенству $|2y + x + 1| + |x + 1| \leq 4$, и вычислить площадь фигуры, содержащей эти точки.

Решение. Из условия получаем равносильное данному двойное неравенство $-4 + |x + 1| \leq 2y + x + 1 \leq 4 - |x + 1|$;

$0,5(-5 + |x + 1| - x) \leq y \leq 0,5(3 - |x + 1| - x)$. Строим графики функций:

1) $y = 0,5(-5 + |x + 1| - x)$ $y(-1) = -2$; $y(0) = -2$; $y(-2) = -1$.

2) $y = 0,5(3 - |x + 1| - x)$ $y(-1) = 2;$ $y(0) = 1;$ $y(-2) = 2.$

Площадь фигуры $S = a \cdot h = 4 \cdot 4 = 16$ кв. ед., где a — основание параллелограмма, а h — его высота.

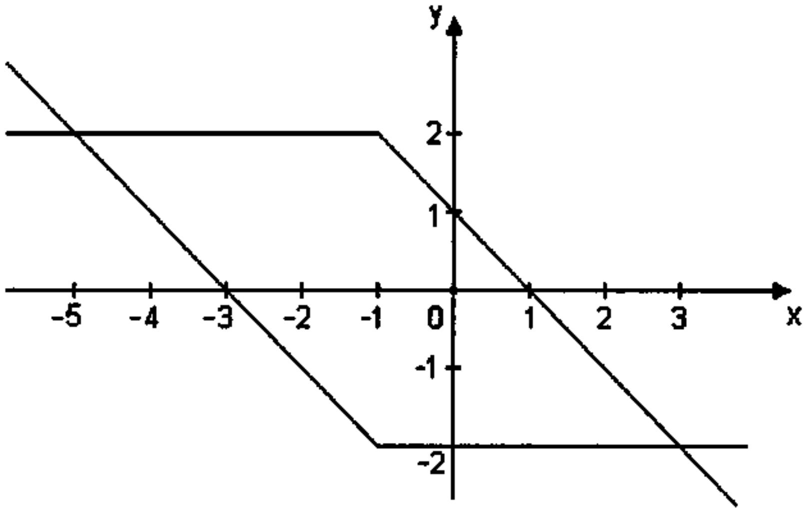


Рис. 6

Пример 5. Найти площадь фигуры, определяемой неравенством $|x + 2| + |y - 2| \le 4$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству:

$-4 + |x + 2| \le y - 2 \le 4 - |x + 2|$; $-2 + |x - 2| \le y \le 6 - |x + 2|$.

Строим графики:

1) $y = -2 + |x + 2|$, $y(-2) = -2$, $y(0) = 0$, $y(-3) = -1$.

2) $y = 6 - |x + 2|$, $y(-2) = 6$, $y(0) = 4$, $y(-3) = 5$.

$S = 0,5 \cdot 8 \cdot 8 = 32$ кв. ед.

Этот результат может быть получен как площадь квадрата (полупроизведение его диагоналей) или как сумма площадей двух треугольников с основаниями 8 и высотами 4 (см. рис. 7).

Замечание: График уравнения $|x + 2| + |y - 2| = 4$ получается из графика уравнения $|x| + |y| = 4$ путем параллельного переноса на вектор $(-2; 2)$.

Ясно, что площади известной фигуры и вновь полученной равны. Предлагаем построить график этого простого уравнения самостоятельно.

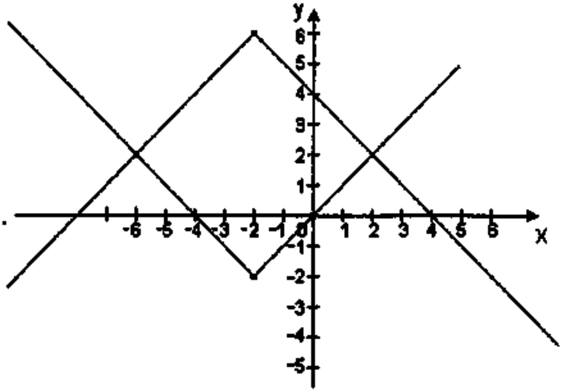


Рис. 7

П р и м е р 6. Решить уравнение $|x - a| + |x - 1| = 2$.

Решение.

1) $x \geq a$, $x - a = 2 - |x - 1|$, построим график $a = x - 2 + |x - 1|$: $a(1) = -1$, $a(0) = -1$, $a(2) = 1$.

2) $x < a$, $-x + a = 2 - |x - 1|$, построим график $a = 2 + x - |x - 1|$: $a(1) = 3$, $a(2) = 3$, $a(0) = 1$.

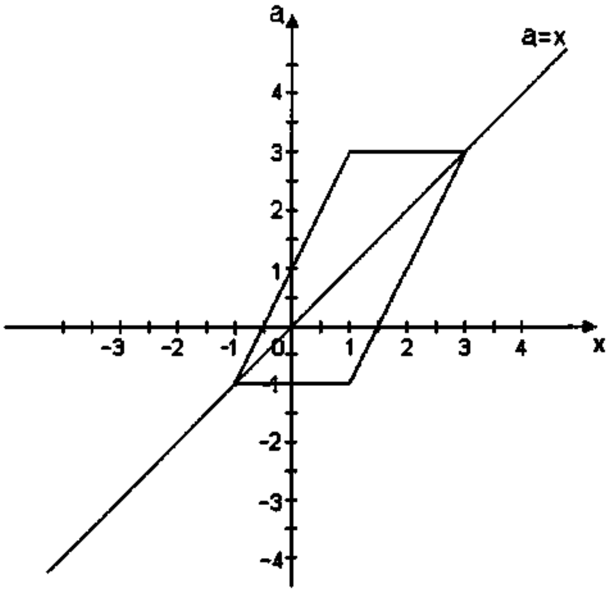


Рис. 8

При $a = 3$ уравнение имеет бесконечное множество корней: $1 \le x \le 3$.

При $-1 < a < 3$ уравнение имеет два корня, причем больший из них находим из уравнения $a = x - 2 + x - 1$, $x = 0{,}5(a + 3)$, а меньший — из уравнения $a = 2 + x + x - 1$, $x = 0{,}5(a - 1)$.

При $a = -1$ уравнение имеет корни $-1 \le x \le 1$.

Ответ: при $a = 3$ $x \in [1;\ 3]$; при $-1 < a < 3$ $x = 0{,}5(a + 3)$ и $x = 0{,}5(a - 1)$; при $a = -1$ $x \in [-1;\ 1]$; при $a \in (-\infty;\ -1) \cup (3;\ \infty)$ уравнение корней не имеет.

П р и м е р 7. Решить уравнение $x\,|x - 4| + a = 0$.

Строим график функции $f(x) = a = -x\,|x - 4| = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x^2 + 4x \\ x \ge 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 4x \\ x < 4 \end{cases} \end{array}\right.$

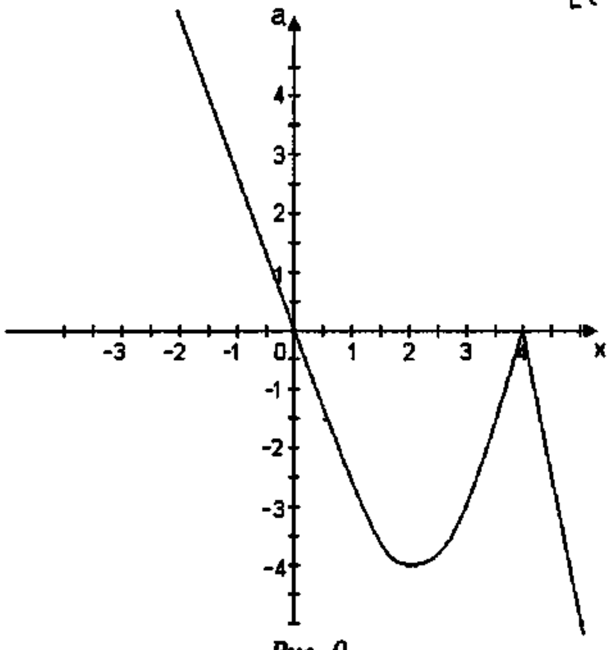


Рис. 9

При $a < -4$ уравнение имеет один корень, являющийся большим корнем уравнения $-x^2 + 4x = a$; $x^2 - 4x + a = 0$; $x = 2 + \sqrt{4 - a}$.

При $a = 4$ уравнение имеет два корня, один из которых $x = 2$, а второй — больший корень уравнения $-x^2 + 4x = -4$, т. е. $x = 2+2\sqrt{2}$.

При $-4 < a < 0$ уравнение имеет три корня, два из которых являются корнями уравнения $x^2 - 4x - a = 0$: $x = 2\pm\sqrt{4+a}$, а третий — больший корень уравнения $-x^2 + 4x = a$, т. е. $x = 2+\sqrt{4-a}$.

При $a = 0$ уравнение имеет два корня: $x = 0$ и $x = 4$.

При $a > 0$ уравнение имеет один корень, являющийся меньшим корнем уравнения $x^2 - 4x = a$, т. е. $x = 2-\sqrt{4+a}$.

Ответ: при $a > -4$ $x = 2+\sqrt{4-a}$; при $-4 \le a \le 0$ $x = 2\pm\sqrt{4+a}$, $x = 2+\sqrt{4-a}$; при $a > 0$ $x = 2-\sqrt{4+a}$.

Пример 8. Решить уравнение $2 - |x - a| = x^2$.

Решение. При $x \ge a$ $x - a = 2 - x^2$, $a = x^2 + x - 2$. При $x < a$ $x - a = x^2 - 2$, $a = -x^2 + x + 2$.

В прямоугольной системе координат строим графики функций $a = x^2 + x - 2$, где $a \le x$, и $a = -x^2 + x + 2$, где $a > x$.

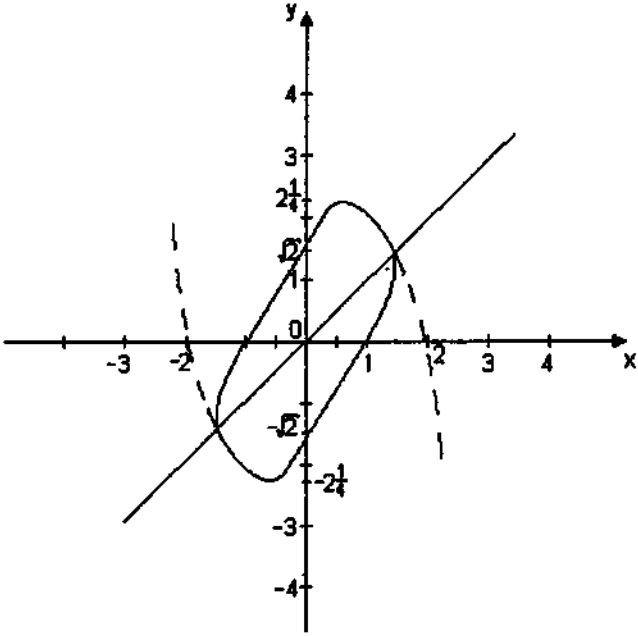


Рис. 10

Найдем ординаты точек пересечения графиков функций:

$x^2 + x - 2 = -x^2 + x + 2$, откуда $x = \pm\sqrt{2}$, тогда а $= \pm\sqrt{2}$. Посмотрим на рис. 10.

При $a = 2{,}25$ уравнение имеет один корень $x = 0{,}5$.

При $\sqrt{2} \le a < 2{,}25$ уравнение имеет два корня, которые являются корнями уравнения $a = 2 + x - x^2$, $x^2 - x + a - 2 = 0$, т. е. $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$.

При $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ уравнение имеет два корня, меньший из которых равен меньшему корню уравнения $a = 2 + x - x^2$, т. е. $x = \dfrac{1-\sqrt{9-4a}}{2}$, а больший — большему корню уравнения $a = x^2 + x - 2$, т. е. $x = \dfrac{-1+\sqrt{9+4a}}{2}$.

При $-2{,}25 < a \le -\sqrt{2}$ уравнение имеет два корня, которые являются корнями уравнения $x^2 + x - 2 - a = 0$, т. е. $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9+4a}}{2}$.

При $a = -2{,}25$ уравнение имеет корень $x = -0{,}5$.

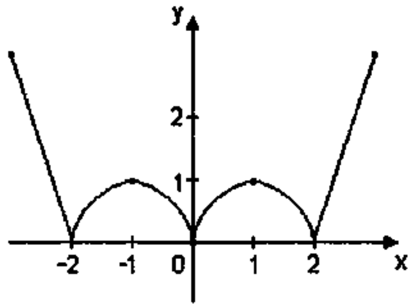
Ответ: при $-2{,}25 \le a \le -\sqrt{2}$ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9+4a}}{2}$; при $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ $x = \dfrac{1-\sqrt{9-4a}}{2}$, $x = \dfrac{1+\sqrt{9+4a}}{2}$; при $\sqrt{2} \le a \le 2{,}25$ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$; при $|a| > 2{,}25$ уравнение корней не имеет.

Упражнения.

1. Сколько корней имеет уравнение $|x^2 - 2|x|| = a$ в зависимости от значений параметра?
2. Решить уравнение $|x^2 - 2x| + |x^2 + 2x| = a$.
3. Решить уравнение $|2x^2 - 3x + 2| = -2x^2 - 8x + 2a$.
4. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x - 1| = ax + 2$.
5. Решить неравенство $|2x + a| \le x + 2$.

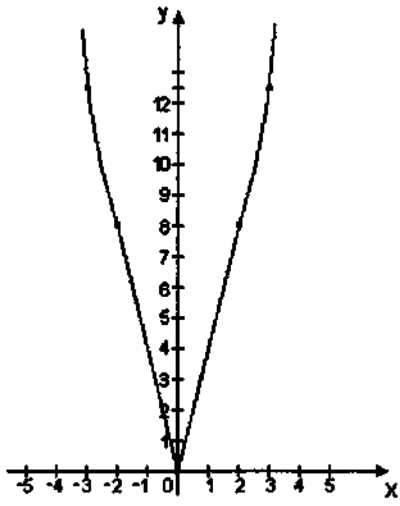
Решения, ответы:

1. Построим график функции $y = |x^2 - 2|x||$. Ясно, что графиком функции у = а является прямая, параллельная оси Ox.



Из рисунка видно, что при $a < 0$ уравнение корней не имеет; при $a = 0$ уравнение имеет три корня; при $0<a<1$ — шесть корней; при $a = 1$ — четыре корня; при $a > 1$ — два корня.

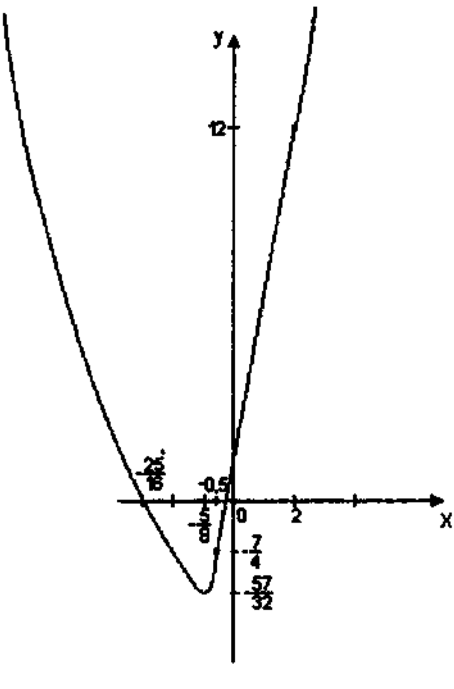
2. Данное уравнение равносильно уравнению:
$|x(x-2)| + |x(x+2)| = a$.
Строим график функции $y = |x(x-2)| + |x(x+2)|$ для $x > 0$, и, заметив, что $D(y) = R$ и функция является четной, затем отображаем его симметрично относительно оси Oy.



Из рисунка видно, что при $a < 0$ уравнение корней не имеет.
При $a = 0$ $x = 0$.

При $0 < a \le 8$ уравнение имеет два корня, которые находятся из уравнений $-4x = a$ и $4x = a$: $x = \pm 0{,}25a$. При $a > 8$ уравнение имеет корни, являющиеся корнями уравнения $2x^2 = a$: $x = \pm\sqrt{\dfrac{a}{2}}$.

3. Очевидно, что $a = 0{,}5(\,|\,2x^2 - 3x - 2\,|\, + 2x^2 + 8x)$. Если $2x^2 - 3x - 2 = 0$, т. е. $x \le -0{,}5$ и $x \ge 2$, то $a = \dfrac{4x^2 + 5x - 2}{2}$. Если $2x^2 - 3x + 2 < 0$, т. е. $-0{,}5 < x < 2$, то $a = 0{,}5(11x + 2)$. Построим график функции $y = 0{,}5(\,|\,2x^2 - 3x + 2\,|\, + 2x^2 + 8x)$ схематично, указав характеристические точки: $x_в = -\dfrac{5}{8}$, $y_в = -\dfrac{57}{32}$.



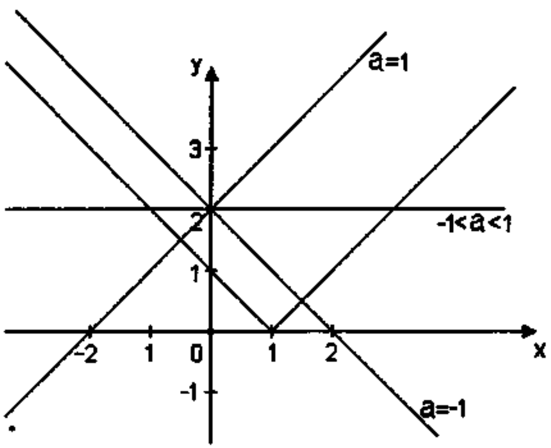
При $a < -\dfrac{57}{32}$ уравнение корней не имеет.

При $a = -\dfrac{57}{32}$ уравнение имеет один корень $x = -\dfrac{5}{8}$.

При $-\frac{57}{32}<a<-\frac{7}{4}$ и $a \geq 12$ уравнение имеет два корня, которые находятся из уравнения $0{,}5(4x^2 + 5x - 2) = a$: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57+32a}}{8}$.

При $-\frac{7}{4}<a<12$ уравнение имеет два корня: один находится из уравнения $0{,}5(11x + 2) = a$: $x = \frac{2a-2}{11}$, а второй является меньшим корнем уравнения $4x^2 + 5x - 2(a - 1) = 0$: $x = \frac{-5-\sqrt{57+32a}}{8}$.

4. *I способ.* Изобразим график функции $y = |x - 1|$ и заметим, что график функции $y = ax + 2$ — это пучок прямых, проходящих через точку (0; 2). При $a = \pm 1$ получаем прямые, параллельные ветвям графика $y = |x - 1|$, a является угловым коэффициентом прямой, поэтому прямые проходят через точку (2; 0) и наклонены к оси Ox под углами 45° и 135°. При $-1 < a < 1$ любая прямая дважды пересекает график функции $y = |x - 1|$, при других a имеется только одна точка пересечения.



2 способ. Из уравнения следует, что $a = \dfrac{|x-1|-2}{x}$. Построим

график функции $f(x) = \dfrac{|x-1|-2}{x} = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\dfrac{3}{x} \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} -1-\dfrac{1}{x} \\ x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

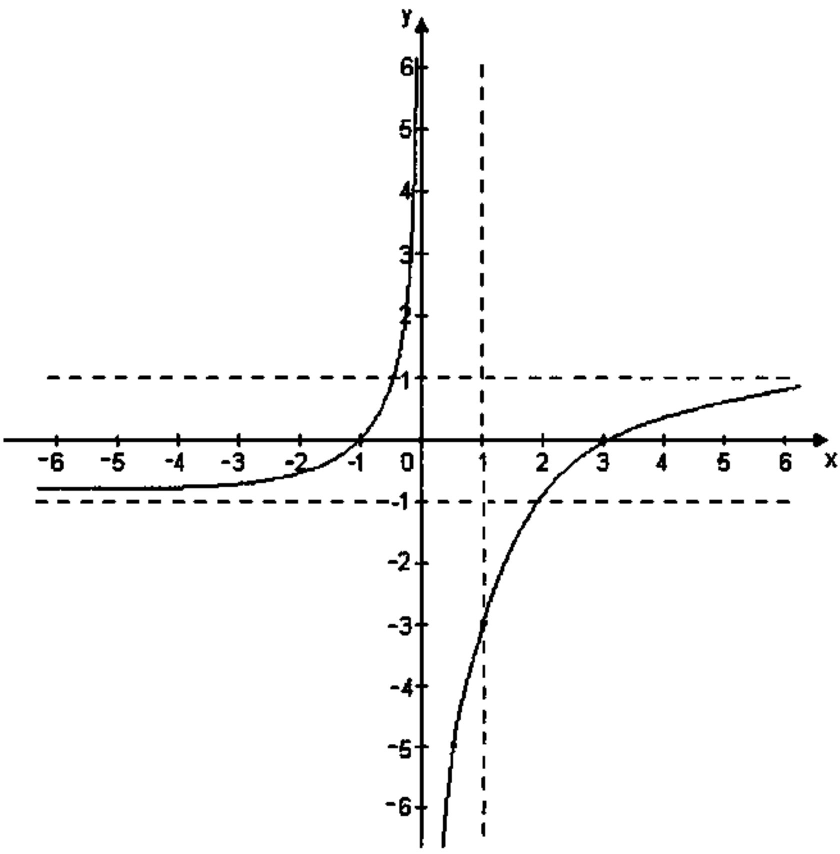
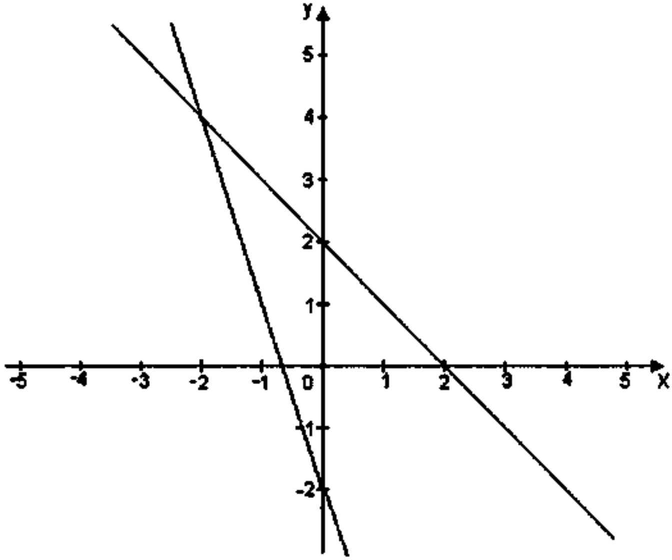


Рисунок наглядно показывает, что при $a \in (-1; 1)$ уравнение имеет два корня, а при остальных значениях a уравнение имеет единственный корень.

5. Неравенство равносильно двойному неравенству:
$-x - 2 \le 2x + a \le x + 2$; $-3x - 2 \le a \le 2 - x$.
Построим в одной система координат прямые $y = -3x - 2$ и $y = 2 - x$. Они пересекаются в точке $(-2; 4)$.



Из рисунка видно, что при $a > 4$ неравенство решений не имеет. При $a = 4$ $x = -2$. При $a < 4$ $x_1 < x < x_2$, где x_1 — корень уравнения $-3x - 2 = a$: $x = -\frac{a+2}{3}$; x_2 — корень уравнения $2 - x = a$: $x_2 = 2 - a$.

Ответ: при $a > 4$ решений нет; при $a = 4$ $x = -2$; при $a < 4$ $x \in \left[-\frac{a+2}{3}; 2-a\right]$.

XVI
НЕСКОЛЬКО НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

П р и м е р 1. Найти сумму всех корней уравнения
$||x|-1|=0{,}5x^2+0{,}125x^4-3.$

Решение. Так как левая и правая части уравнения — функции четные. Тогда, если x_0 является корнем уравнения, то и $-x_0$ — корень этого уравнения, нуль корнем уравнения не является. Ясно, что сумма всех корней равна нулю.

Нетрудно убедиться, что уравнение имеет корни, например, $x=\pm 2$.

Ответ: 0.

П р и м е р 2. Решить уравнение $6\sin(x+\frac{\pi}{3})+|\sin(x-\frac{\pi}{6})|=1.$

Решение. Заметим, что $\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|=\sqrt{1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$,

поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $6t+\sqrt{1-t^2}=1\,(*)$,

где $t=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ и $t\in[-1;\ 1]$. Решая уравнение, последовательно получаем: $1-t^2=1-12t+36t^2$; $37t^2-12t=0$, откуда $t=0$ и $t=\frac{12}{37}$. Второе полученное значение t корнем уравнения (*) не является, тогда $\sin(x+\frac{\pi}{3})=0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

П р и м е р 3. Построить график зависимости $y+|y|=\sin x+|\sin x|$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\ge 0\\ \sin x\ge 0\\ y=\sin x\end{cases}\\ \begin{cases} y\ge 0\\ \sin x\le 0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases} y\le 0\\ \sin x\ge 0\\ \sin x=0\end{cases}.\\ \begin{cases} y\le 0\\ \sin x\le 0\\ 0=0\end{cases}\end{array}\right.$$

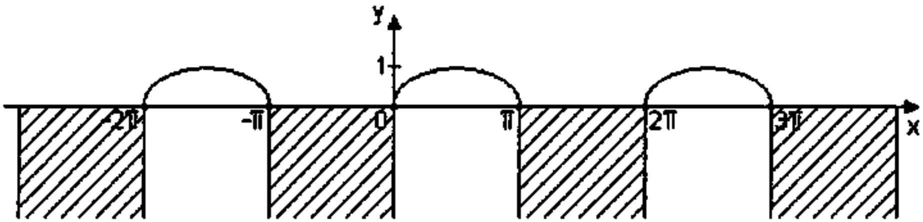


Рис. 1

П р и м е р 4. Решить уравнение $|2-3\sin 2x|-|3\cos x-2| = 4(\cos x-\sin 2x)$.

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$|3\sin 2x-2|+4\sin 2x=|3\cos x-2|+4\cos x$ и рассмотрим функцию $f(t)=|3t-2|+4t$ на отрезке $[-1;\ 1]$. На рассматриваемом промежутке функция возрастает и каждое свое значение принимает только один раз, т. е. равенство $f(\sin 2x)=f(\cos x)$ выполняется, когда $\sin 2x=\cos x$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ (-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

П р и м е р 5. Решить уравнение $\frac{1}{|\cos x|}=\sqrt{3}tgx-1$.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{|\cos x|}=\sqrt{1+tg^2x}$, и, обозначив $tgx = t$, получаем уравнение $\sqrt{1+tg^2x}=\sqrt{3}t-1$ (*); $2t^2-2\sqrt{3}t=0$, откуда $t=0$ и $t=\sqrt{3}$. $t=0$ — посторонний корень уравнения (*). $tgx=\sqrt{3}$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

П р и м е р 6. Решить уравнение $\sqrt{|x-2|-1}+\sqrt{x+3}=2$.

Решение. Положим $\sqrt{x+3}=t;\ t\ge 0$, тогда $x=t^2-3$ и исходное уравнение принимает вид $\sqrt{|t^2-5|-1}=2-t$, а это уравнение равносильно системе $\begin{cases}|t^2-5|-1=(2-t)^2\\ t\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-t^2=4-4t+t^2\\ t\le 2\end{cases}$, откуда $t=0$ и $t=2$. Итак, $\sqrt{x+3}=0$, $x=-3$ или $\sqrt{x+3}=2$ и $x=-1$.

Ответ: -3; 1.

П р и м е р 7. Решить неравенство $|\sin x|\ge\cos x$.

Решение. Неравенство выполняется при $\cos x<0$,

$x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. Если $\cos x\ge 0$, то $\sin^2x\ge\cos 2x$, $2\cos^2x-1\le 0$, $(\sqrt{2}\cos x+1)(\sqrt{2}\cos x-1)\le 0$, откуда $\sqrt{2}\cos x\le 1$, $\cos x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le\frac{7\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$ (сюда входят и решения неравенства $\cos x<0$).

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

П р и м е р 8. При каких a уравнение $|x^3 - 3a^2x| = 0{,}5a$ имеет ровно два корня?

Решение. Из условия задачи следует, что решение возможно только для $a \geq 0$. Построим график функции $f(x) = x^3 - 3a^2x$. $D(f): R$; $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$. Критические точки $x = \pm a$. При $a \geq 0$ функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -a]$ и $[a; +\infty)$, а убывает на промежутке $[-a; a]$. $x = -a$ — точка максимума; $f(-a) = -a^3 + 3a^3 = 2a^3$. $x = a$ — точка минимума $f(a) = a^3 - 3a^3 = -2a^3$. На рис. 2 показан график функции $y = |x^3 - 3a^2x|$.

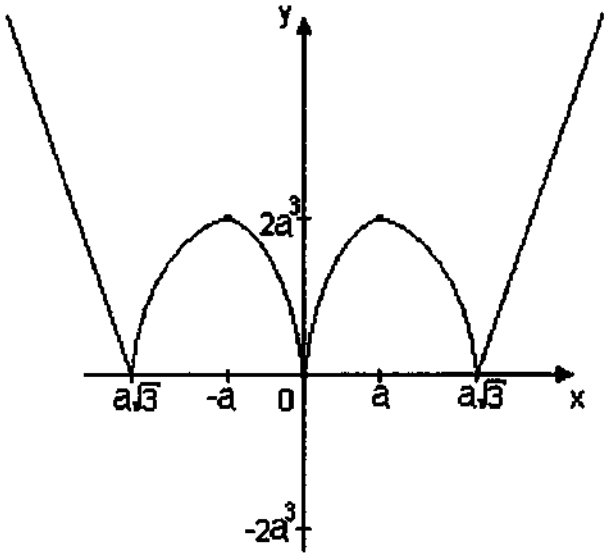


Рис. 2

Из рисунка видно, что уравнение будет иметь два корня при $0{,}5a > 2a^3$, а т. к. $a > 0$, то $0 < a < 0{,}5$.

Ответ: $0 < a < 0{,}5$.

П р и м е р 9. При каких $a > 0$ система $\begin{cases} |x - a| \leq 2 \\ x^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$ решений не имеет?

Решение.

1) $|x - a| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - a \leq 2 \Leftrightarrow a - 2 \leq x \leq a + 2$.

2) $x^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq -4 \end{array}\right.$.

Система не будет иметь решений, если выполняются условия:

$\begin{cases} a+2<4 \\ a-2>-4 \end{cases}$; $\begin{cases} a<2 \\ a>-2 \end{cases}$

Ответ: $(-2; 2)$.

Пример 10. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $|y - x| + |y + x| \leq 2$.

Решение.

Т. к. обе части неравенства неотрицательные числа, то после возведения обеих частей неравенства в квадрат получим ему равносильное неравенство $2y^2 + 2x^2 + 2|y^2 - x^2| \leq 4 \Leftrightarrow |y^2 - x^2| \leq 2 - y^2 - x^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2 + y^2 + x^2 \leq y^2 - x^2 \leq 2 - y^2 - x^2$. Решение последнего двойного неравенства дает $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$.

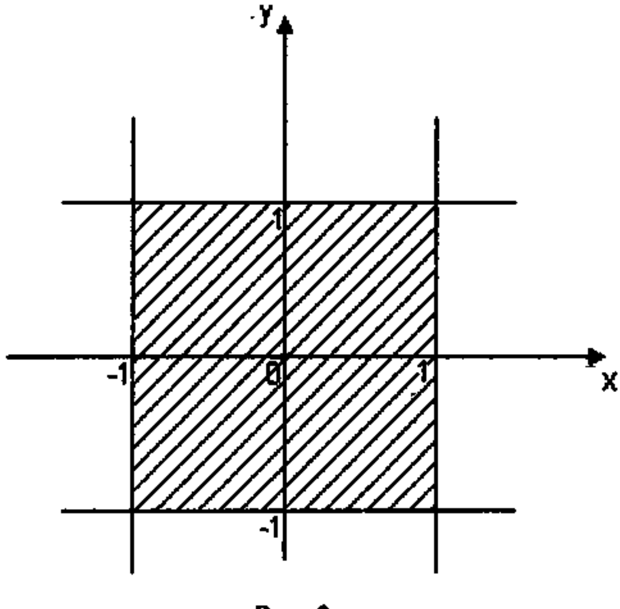


Рис. 3

Пример 11. При каких значениях $a > 0$ уравнение $|x^2 + ax - a^2| = 2a + 1$ имеет три корня? Найти эти корни.

Решение. Графиком функции $f(x) = x^2 + ax - a^2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, с вершиной в точке $(-0{,}5a; -1{,}25a^2)$.

Нули функции $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a$ и $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$. Построим схематично график функции $g(x) = |x^2 + ax - a^2|$.

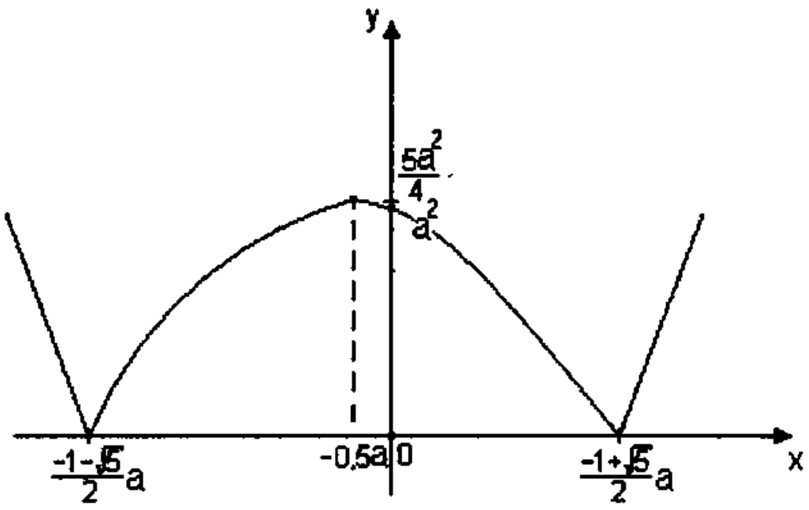


Рис. 4

Из рис. 4 видно, что при $2a + 1 = 1{,}25a^2$ уравнение имеет три корня. $5a^2 - 8a - 4 = 0$, тогда $a_1 = 2$; $a_2 = -0{,}4 < 0$. Итак, три корня уравнение имеет при $a = 2$. Один из корней равен -1, а два других находятся из уравнения $x^2 + ax - a^2 = 2a + 1$, при $a = 2$, тогда $x = -1 \pm \sqrt{10}$.

Пример 12. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = ||x - 1| - 2|$ и $y = 2$.

Решение.

1) $x \geq 1$, $y = |x - 3|$; $y(1) = 2$, $y(3) = 0$, $y(4) = 1$.

2) $x \leq 1$, $y = |x + 1|$; $y(1) = 2$, $y(-1) = 0$, $y(-2) = 1$.

Построим графики функций $y = |x-3|$, $y = |x+1|$ и $y = 2$.

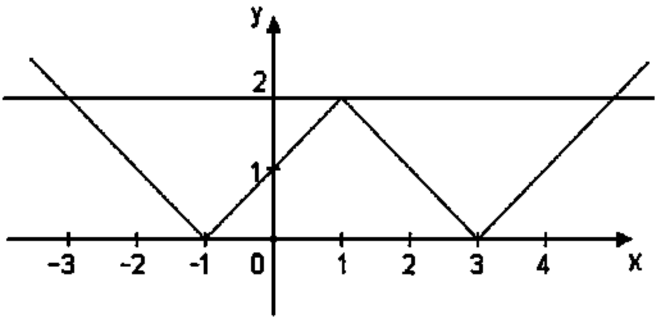


Рис. 5

$S = 0{,}5\cdot 4\cdot 2 + 0{,}5\cdot 2\cdot 4 = 8$ кв. ед.

П р и м е р 13. При каких a неравенство $||x^2 - 2| - 1| - 3 \le a^2$ выполняется при всех значениях x из промежутка [1; 4]?

Решение. Имеем последовательно:

$||x^2 - 2| - 1| \le a^2 + 3$; $-(a^2 + 3) = |x^2 - 2| - 1 \le a^2 + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a^2 - 2 \le |x^2 - 2| \le a^2 + 4 \Leftrightarrow -a^2 - 4 \le x^2 - 2 \le a^2 + 4$

$-a^2 - 2 \le x^2 \le a^2 + 6 \Leftrightarrow -\sqrt{a^2+6} \le x \le \sqrt{a^2+6}$. Далее необходимо

решить систему: $\begin{cases} -\sqrt{a^2+6} \le 1 \\ \sqrt{a^2+6} \ge 4 \end{cases}$; $\begin{cases} a \in R \\ a^2 + 6 \ge 16 \end{cases}$; $a^2 \ge 10$.

Ответ: $(-\infty;\ -\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10};\ \infty)$.

П р и м е р 14. Решить неравенство $|x - 2| \le |x - m|$.

Решение. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, после возведения его частей в квадрат получаем равносильное неравенство $(x-2)^2 \le (x-m)^2$, $(m-2)(2x - 2 - m) \le 0$.

Если $m = 2$, то $(2x-4)\cdot 0 \le 0$; $x \in R$. Если $m > 2$, то $x \le 0{,}5(m+2)$. Если $m < 2$, то $x \ge 0{,}5(m+2)$.

П р и м е р 15. При каких значениях m уравнение $||x| - 1| = 0{,}5x + m$ имеет ровно три корня? Найти эти корни.

Решение. Построим график функции $y = ||x| - 1|$. Очевидно, что прямая $y = 0{,}5x + m$, имеющая положительный угловой коэффициент, для выполнения условия задачи должна проходить через точки (0; 1) или (−1; 0), тогда $1 = 0{,}5 \cdot 0 + m$, откуда $m = 1$ и $0 = -0{,}5 + m$, тогда $m = 0{,}5$.

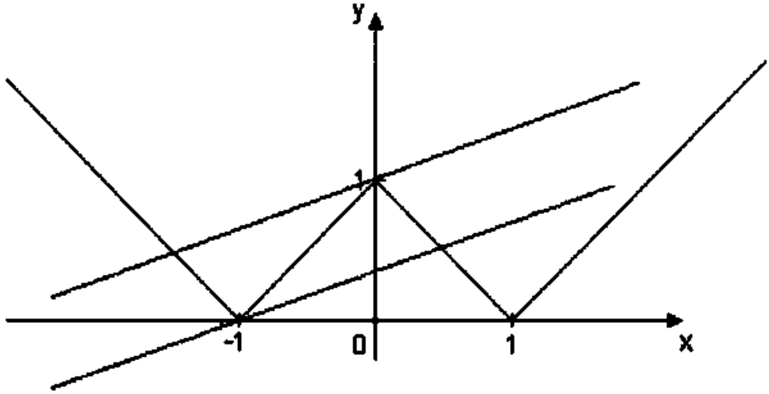


Рис. 6

Пусть $m = 1$, тогда уравнение принимает вид $||x| - 1| = 0{,}5x + 1$ и имеет три корня: $x = 0$, корень уравнения $x - 1 = 0{,}5x + 1$, $x = 4$ и корень уравнения $-x + 1 = 0{,}5x + 1$, $x = -1\frac{1}{3}$.

Пусть $m = 0{,}5$, тогда уравнение принимает вид $||x| - 1| = 0{,}5x + 0{,}5$ и имеет три корня: $x = -1$, корень уравнения $x - 1 = 0{,}5x + 0{,}5$, $x = 3$ и корень уравнения $-x + 1 = 0{,}5x + 0{,}5$, $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: при $m = 1$ $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1\frac{1}{3}$; при $m = 0{,}5$ $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

П р и м е р 16. Решить уравнение $|\sin 2x \cdot \cos x| + |\cos 2x \cdot \sin x| = 1$.
Решение.

Поскольку $|a| + |b| = |a + b|$ при $ab \geq 0$ и $|a| + |b| = |a - b|$ при $ab \leq 0$, составим и решим две системы:

$$\begin{cases}\cos x\sin 2x\sin x\cos 2x\ge 0\\ \left|\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x\right|=1\end{cases};\quad \begin{cases}\sin^2 2x(1-2\sin^2 x)\ge 0\\ \left|\sin 3x\right|=1\end{cases};$$

1)
$$\begin{cases}\sin^2 2x(1-2\sin^2 x)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}\sin 3x=1\\ \sin 3x=-1\end{array}\right.\end{cases};\quad \begin{cases}\sin^2 2x(1-2\sin^2 x)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in z\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in z\end{array}\right.\end{cases}$$

Из первой серии корней неравенству удовлетворяют

$x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi l;\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ \{l;\ m\}\in Z,$ а из второй серии корней

$x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi p;\ x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi q,\ \{p,q\}\in Z$.

Объединяя серии, получим $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi s,\ s\in Z$.

2) $$\begin{cases}\cos x\sin 2x\sin x\cos 2x\le 0\\ \left|\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x\right|=1\end{cases};\quad \begin{cases}\sin^2 2x(1-2\sin^2 x)\le 0\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.\end{cases}$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in z;\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi s,\ s\in Z$.

Замечание: $\left|\sin 3x\right|=1;\ \sin^2 3x=1;\ \cos^2 3x=0;\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3},\ n\in Z$.

Пример 17. Решить уравнение $|\sin x|+\cos x=-1$.

Решение. $|\sin x|=-1-\cos x\ge 0$, $\cos x\le -1$, но $\cos x\ge -1$, поэтому $\cos x\ge -1$, тогда $\sin x=0$ и $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$.

Пример 18. Решить уравнение

$$||||||x-1|-1|-1|-1|-1|-1|=a.$$

Решение. Построим график функции, стоящей в левой части уравнения.

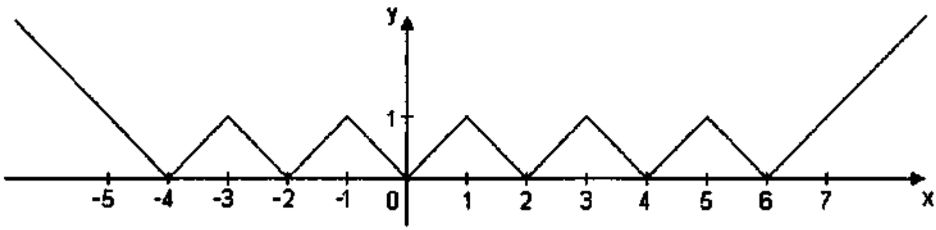


Рис. 7

При $a < 0$ уравнение корней не имеет; при $a = 0$ (ось Ox) корни уравнения 0; ±2; ±4; 6; при $a > 1$ корни уравнения ±1; ±3; ±5; 7; при $a > 1$ уравнение имеет два корня: это корни уравнений $x - 6 = a$ и $-x = a$, т. е. $x = a + 6$ и $x = -a$.

При $0 < a < 1$ уравнение имеет двенадцать корней; которые находим, решая уравнения: $-x = a$; $x = a$; $-x + 2 = a$; $x - 2 = a$; $-x + 4 = a$; $x - 4 = a$; $x - 6 = a$; $-x + 6 = a$; $-x - 4 = a$; $x + 4 = a$; $-x - 2 = a$; $x + 2 = a$, т. е. $x = -a$; $x = a$; $x = 2 - a$; $2 + a$; $x = 4 - a$; $x = 4 + a$; $x = a + 6$; $x = 6 - a$; $x = -(a + 4)$; $x = a - 4$; $x = -(a - 2)$; $x = a - 2$.

Ответ: при $a < 0$ уравнение корней не имеет; при $a = 0$ -4; -2; 0; 2; 4; 6; при $a = 1$ -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; при $0 < a < 1$ $\pm a$; $\pm(a + 4)$; $\pm(a - 4)$; $\pm(a + 2)$; $\pm(a - 2)$; $6 \pm a$.

Пример 19. При каких значениях a и b решением неравенства $||x - a| - b| \le b$ является отрезок [1; 3]?

Решение.

$-b \le |x - a| - b \le b$; $0 \le |x - a| \le 2b$;

$-2b \le x - a \le 2b$; $a - 2b \le x \le 2b + a$.

Имеем систему $\begin{cases} a - 2b = 1 \\ a + 2b = 3 \end{cases}$, откуда $a = 2$ и $b = 0{,}5$.

Ответ: $a = 2$; $b = 0{,}5$.

Пример 20. Построить график функции

$y = \dfrac{(x^2 - 5|x| + 6)\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{(x^2 - 5x + 6)\left||x| - 2\right|}$. Найти область значений этой функции.

Решение. Выполним очевидные преобразования:

$$y=\frac{\left(x^2-5|x|+6\right)|x-2|}{\left(x^2-5x+6\right)\left||x|-2\right|}.$$

$D(y)$: $x\neq 3$; $x\neq\pm 2$. $x=-2$ — точка разрыва второго рода (со смещением).

а) $x<-2$ $y=\dfrac{x+3}{x-3}=1+\dfrac{6}{x-3}$.

Очевидно, что $y=1$ — горизонтальная асимптота полученного графика, а $x=-3$ — нуль функции.

б) $-2<x\leq 0$; $y=\dfrac{-\left(x^2+5x+6\right)(x-2)}{\left(x^2-5x+6\right)(x+2)}=-\dfrac{x+3}{x-3}=-1-\dfrac{6}{x-3}$.

в) $0\leq x<2$: $y=\dfrac{\left(x^2-5x+6\right)(x-2)}{\left(x^2-5x+6\right)(x-2)}=1$.

г) $x>2$; $x\neq 3$: $y=1$.

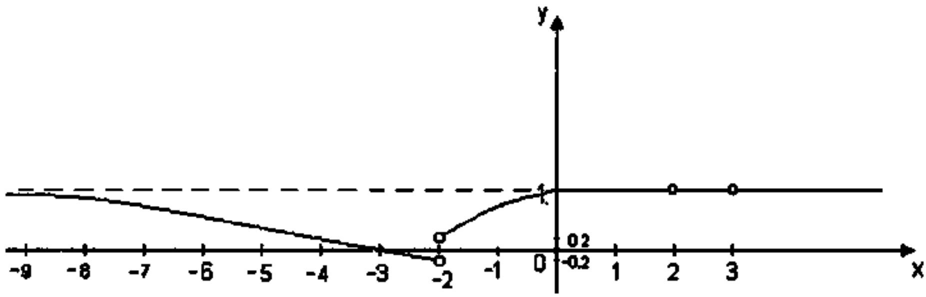


Рис. 8

Ответ: $E(y)$: $\left(-\dfrac{1}{5};1\right]$.

Пример 21. Решить уравнение $2|\cos 2x|=a+\sin^2 x$.

Решение. Очевидно, что $a=2|1-2\sin^2 x|-\sin^2 x$. Полагая, что $\sin^2 x=t$, где $t\in[0;1]$, получаем $a=f(t)=2|2t-1|-t$.

Построим график функции $f(t)$: при $0\leq t\leq 0{,}5$ $f(t)=-5t+2$; при $0\leq t\leq 1$ $f(t)=3t-2$

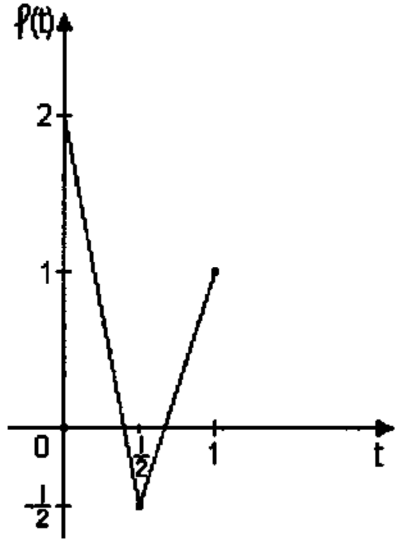


Рис. 9

При $a = -0{,}5$ $t = 0{,}5$ и $\sin^2 x = 0{,}5$; $1 + \cos 2x = 1$; $\cos 2x = 0$;
$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n,\ n \in Z$

При $-0{,}5 < a \le 1$ уравнение $a = 2\,|\,2t - 1\,| - t$ имеет два корня, которые находятся при решении уравнений:

$a = -5t + 2$ и $a = 3t - 2$, откуда $t = \frac{2-a}{5}$; $t = \frac{a+2}{3}$, но тогда

$$\sin^2 x = \frac{2-a}{5};\ \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{2-a}{5};\ \cos 2x = \frac{1+2a}{5};$$

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1+2a}{5}\right) + \pi n,\ n \in Z$$

и

$$\sin^2 x = \frac{a+2}{3};\ \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{a+2}{3};\ \cos 2x = -\frac{1+2a}{3};$$

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1+2a}{3}\right) + \pi k,\ k \in Z.$$

При $1 < a < 2$ уравнение имеет решение:

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1+2a}{5}\right) + \pi k, k \in Z.$$

Пример 22. Доказать, что

$$\left|\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}\right| + \left|\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right| = |x| + |y|.$$

Доказательство. Из условия задачи следует, что $xy \geq 0$ и $|xy| = xy$. Возведем обе части данного равенства в квадрат, получим:

$$\frac{(x+y)^2}{4} - (x+y)\sqrt{xy} + xy + 2\left|\frac{(x+y)^2}{4} - xy\right| + \frac{(x+y)^2}{4} +$$

$$+(x+y)\sqrt{xy} + xy = x^2 + y^2 + 2|xy|;$$

$$\frac{(x+y)^2}{2} + 2xy + \frac{(x-y)^2}{2} = x^2 + y^2 + 2xy; \quad x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2xy,$$

что и требовалось доказать.

Пример 23. Доказать, что

$$|x+y| + |x-y| = \left|x + \sqrt{x^2 - y^2}\right| + \left|x - \sqrt{x^2 - y^2}\right|.$$

Доказательство. Аналогично № XXII после возведения в квадрат обеих частей равенства получаем $4x^2 = 4x^2$ (учесть, что $|x| > |y|$).

Пример 24. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$ имеет единственное решение.

Решение. Легко увидеть, что если пара $(x_0; y_0)$ является решением системы, то и пара $(-x_0; y_0)$ будет решением этой системы. Если система имеет единственное решение, то $x_0 = -x_0$, откуда $x_0 = 0$. Из второй системы следует, что при этом $y = \pm 1$.

Подставив в первое уравнение $x = 0$ и $y = 1$, получим $1 = 1 + a$, $a = 0$. Затем подставим в первое уравнение $x = 0$ и $y = -1$, $-1 = 1 + a$, $a = 2$. Полученный результат не дает возможности утверждать, что при найденных значениях a система не будет иметь еще каких-нибудь решений.

При $a = 0$ получаем систему: $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. Из второго уравнения системы следует, что $|x| \le 1$; $|y| \le 1$, но тогда из первого уравнения системы $y = 2^{|x|} + |x| - x^2 = 2^{|x|} + |x|(1 - |x|)$, $|y| \ge 1$. Значит, $y = 1$ и $(0; 1)$ — единственное решение системы.

При $a = 2$ получаем систему:

$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + 3 - y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$, имеющую более одного решения, например, $(0; -1)$ и $(-1; 0)$.

Ответ: 0.

Пример 25. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3 \\ 9\log_2(x+y)\log_2(x-y) = 2\log_2^2(x^2 - y^2) \end{cases}.$$

Решение. Из условия задачи следует, что $\log_2(x + y)\log_2(x - y) \ge 0$, но тогда $|\log_2(x + y)| + |\log_2(x - y)| = |\log_2(x + y) + \log_2(x - y)| = |\log_2(x^2 - y^2)|$.

Значит, $\log_2(x^2 - y^2) = 3$ или $\log_2(x^2 - y^2) = -3$.

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 9\log_2(x+y)\log_2(x-y) = 18 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = \dfrac{8}{x+y} \\ \log_2(x+y)(3 - \log_2(x+y)) = 2 \end{cases}$.

$\log_2(x + y) = a$, $a^2 - 3a + 2 = 0$, $a = 1$ или $a = 2$.

$\begin{cases} \log_2(x+y) = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (3; -1)$; $\begin{cases} \log_2(x+y) = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (3; 1)$.

2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{1}{8} \\ 9\log_2(x+y)\log_2(x-y) = 18 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = \dfrac{1}{8(x+y)} \\ \log_2(x+y)(-3-\log_2(x+y)) = 2 \end{cases}$.

Полагая далее $\log_2(x+y) = t$, приходим к уравнению $t^2 + 3t + 2 = 0$, откуда $t = -2$ и $t = -1$.

а) $\begin{cases} x + y = 0{,}25 \\ x - y = 0{,}5 \end{cases}$, откуда $x = \dfrac{3}{8}$ и $y = -\dfrac{1}{8}$;

б) $\begin{cases} x + y = 0{,}5 \\ x - y = 0{,}25 \end{cases}$, откуда $x = \dfrac{3}{8}$ и $y = \dfrac{1}{8}$.

Заметим, что все найденные решения удовлетворяют условию $|x| > |y|$. Может быть выполнена проверка непосредственной подстановкой полученных значений в систему.

Ответ: $(3; -1)$; $(3; 1)$; $\left(\dfrac{3}{8}; -\dfrac{1}{8}\right)$; $\left(\dfrac{3}{8}; \dfrac{1}{8}\right)$.

П р и м е р 26. Решить неравенство $|1 - |x||^{\sin\pi x - 1} \le 1$.

Решение. При $0 < |1 - |x|| < 1$, откуда $x \ne \pm 1$, $-1 < |1 - |x|| < 1$, $-1 < |x| - 1 < 1$, $0 < |x| < 2$, $-2 < x < 2$, $x \ne 0$, $x \ne \pm 1$, тогда $\sin\pi x - 1 \ge 0$, $\sin\pi x \ge 1$, но $\sin\pi x \le 1$, поэтому $\sin\pi x = 1$, $x = 0{,}5 + 2n$, $n \in Z$.

Полученные значения должны удовлетворять условиям $x \ne \pm 1$, $x \ne 0$, $-2 < 0{,}5 + 2n < 2$, $-2{,}5 < 2n < 1{,}5$, $-1{,}25 < n < 0{,}75$, откуда $n = -1$; $x = -1{,}5$ и $n = 0$; $x = 0{,}5$.

При $|1 - |x|| > 1$, $\left[\begin{array}{l} 1 - |x| > 1 \\ 1 - |x| < -1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} |x| < 0 \\ |x| > 2 \end{array}\right.$, $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, но тогда $\sin\pi x - 1 \le 0$, $\sin\pi x \le 1$, что верно при любых полученных значениях x.

Произведем проверку всех ограничений, полученных при решении неравенства.

Очевидно, что при $x = \pm 1$ неравенство смысла не имеет ($0^{-1} \le 1$). При $x = 0$ получаем верное неравенство $1^{-1} \le 1$, значит, $x = 0$ — является решением неравенства. При $x = \pm 2$ получаем верное неравенство $1^1 \le 1$.

Ответ: 0; $-1{,}5$; $0{,}5$; $(-8; -2] \cup [2; 8)$.

П р и м е р 27. Найти площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \le 2|x| + 2|y|$.

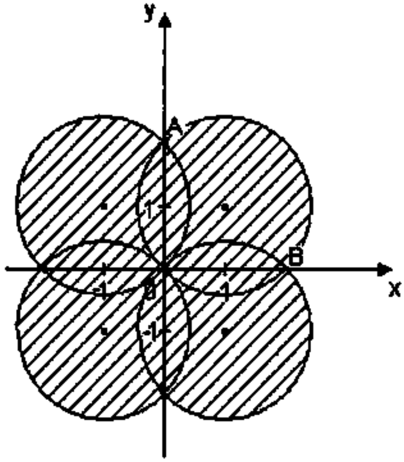


Рис. 10

Решение. Выполним равносильные преобразования неравенства:

$|x|^2 - 2|x| + 1 + |y|^2 - 2|y| + 1 \le 2$; $(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 \le 2$.

При $x \ge 0$, $y \ge 0$ $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2$;

при $x \le 0$, $y \ge 0$ $(x+1)^2 + (y-1)^2 \le 2$;

при $x \le 0$, $y \le 0$ $(x+1)^2 + (y+1)^2 \le 2$;

при $x \ge 0$, $y \le 0$ $(x-1)^2 + (y+1)^2 \le 2$.

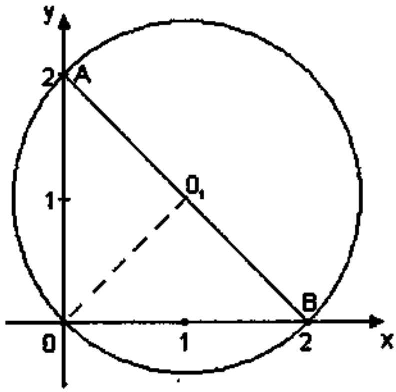


Рис. 11

Получено семейство четырех кругов радиуса $\sqrt{2}$, расположенных симметрично относительно осей координат, которые частично перекрывают друг друга. Найдем, например, площадь четвертой части искомой фигуры, расположенную в первой четверти координатной плоскости: $\frac{1}{4}S_{фиг} = \frac{1}{2}\pi r^2 + S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = \pi + 2$. Площадь всей фигуры равна $4\pi + 8$.

Ответ: $4\pi + 8$ кв. ед.

Пример 28. Доказать, что, если для всех x из отрезка $[-1; 1]$ выполняется неравенство $|ax^2 + bx + c| \le 1$, то для этих значений x выполняется и неравенство $|cx^2 - bx + a| \le 2$.

Доказательство. $|cx^2 - bx + a| = |c(x^2 - 1) + c - bx + a| \le$
$\le |c|(1 - x^2) + |c - bx + a| \le |c| + |c - bx + a|$, где $x \in [0; 1]$.

Если $x = 0$, то $|c| \le 1$, значит, $|cx^2 - bx + a| \le 1 + |c - bx + a|$. Функция $f(x) = |c - bx + a| = |bx - a - c|$ принимает наибольшее значение только в одной из двух точек: -1 или 1. $f(-1) = |a + b + c|$, $f(1) = |b - a - c| = |c - b + a|$. Итак, $f(x)$ не более $|a + b + c|$ или $|c - b + a|$, но при $x = 1$ $|a + b + c| \le 1$ и при $x = -1$ $|a - b + c| \le 1$, что следует из условия задачи.

Итак, $|cx^2 - bx + a| \le 1 + 1 = 2$, что и требовалось доказать.

Пример 29. При каких значениях параметра m уравнение $|x - 2m| + |2x + m| = 5$ имеет два корня?

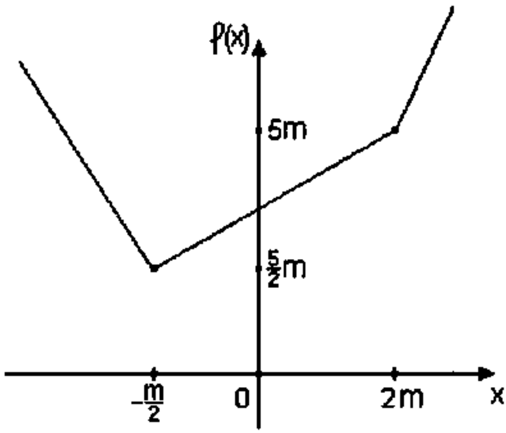


Рис. 12

Решение. Введем функцию $f(x) = |x - 2m| + |2x + m|$. Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = 2m$ и $x = -0{,}5m$. Графиком функции является ломаная. $f(2m) = 5|m|$; $f(-0{,}5m) = 2{,}5|m|$. Итак, $(2m; 5|m|)$ и $(-0{,}5m; 2{,}5|m|)$ — точки излома графика. Схематически изобразим график функции $f(x)$ для случая, когда $m > 0$.

Ясно, что исходное уравнение имеет два корня при выполнении условия $2{,}5|m| < 5$, откуда $|m| < 2$ или $-2 < m < 2$.

При $m < 0$ график будет иметь схожий вид, только точка $2m$ лежит левее, а точка $-0{,}5m$ — правее нуля на оси Ox.

Ответ: $-2 < m < 2$.

Пример 30. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} |x|+|y-1|\le 1 \\ |x-2|+|y-1|\le 1 \end{cases}.$$

Решение. Применим графический способ решения.

Для первого неравенства $|y-1|\le 1-|x| \Leftrightarrow |x|-1\le y-1\le 1-|x| \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |x|\le y\le 2-|x|$. Область, удовлетворяющая этому неравенству, изображена на рис. 13.

Для второго неравенства $|y-1|\le 1-|x-2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-2|-1\le y-1\le 1-|x-2| \Leftrightarrow |x-2|\le y\le 2-|x-2|$.

Область, удовлетворяющая этому неравенству, изображена на рис.14.

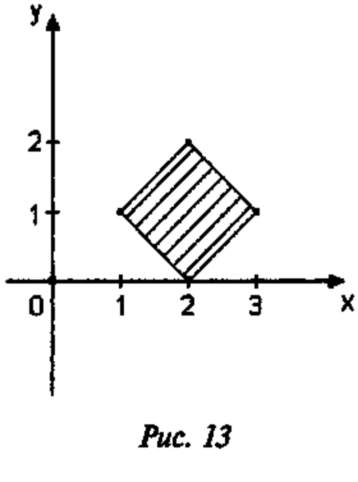


Рис. 13

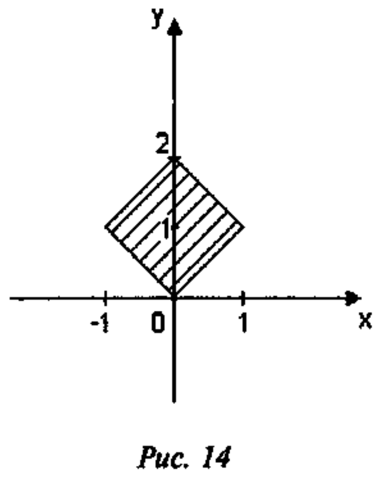


Рис. 14

Два графика, построенные в одной системе координат, имеют единственную общую точку (1; 1).

Ответ: (1; 1).

XVII
АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА В НЕСТАНДАРТНЫХ УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ

В разделе XVI мы рассмотрели решения **примеров 16** и **25**, в которых использовалось равенство $|a + b| = |a| + |b|$, которое верно при $ab \geq 0$. Действительно, оно очевидно при $a \geq 0$, $b \geq 0$ или при $a \leq 0$, $b \leq 0$. К этому же результату можно прийти, если обе части равенства возвести в квадрат: $|a + b|^2 = |a|^2 + 2|ab| + |b|^2$; $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2|ab| + b^2$, откуда $|ab| = ab$, что верно при $ab \geq 0$.

Решим уравнение:

$|\sin x + \cos x| + |\cos x - \sin x| = 2|\cos x|$.

Решение. Из сказанного выше следует, что исходное уравнение равносильно неравенству $\cos 2x - \sin^2 x \geq 0$, т. е. $\cos 2x \geq 0$, откуда получаем $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in Z$.

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in Z$.

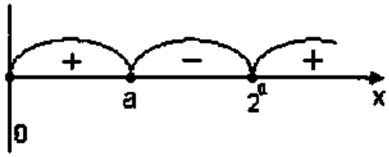
Пусть требуется решить уравнение:

$|a - \log_2 x| + |a - x| = |x - \log_2 x|$, где $a > 1$.

Решение. Положим $a - \log_2 x = m$, $a - x = n$, тогда исходное уравнение легко переписать в виде $|m| + |n| = |m - n|$, которое выполняется при $mn \leq 0$. В этом можно убедиться, например, при возведении обеих частей равенства в квадрат.

Итак, необходимо решить неравенство $(a - \log_2 x)(a - x) \leq 0$. Решим его методом интервалов, для чего введем функцию $f(x) = (a - \log_2 x)(a - x)$; $D(f)$:$(0; +\infty)$.

Найдем нули функции: $(a - \log_2 x)(a - x) = 0$ $x = a$ и $x = 2^a$. Докажем, что $2^a > a$ при $a > 1$. Действительно, функция $g(x) = 2^x - x$ при $x > 1$ является возрастающей, поскольку $g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 > 0$ ($2^x > 2$ при $x > 1$; $2^x \ln 2 > 2\ln 2$; $2^x \ln 2 - 1 > 2\ln 2 - 1 > 0$). Значит, $g(a) > g(1)$, т. е. $2a - a > 1$; $2^a > 1 - a$.



Ответ: $[a;\ 2^a]$ при $a > 1$.

Рассмотрим уравнение $|\cos x - 0{,}5| + |0{,}5 - x| = \cos x - x$.

Если принять $\cos x - 0{,}5 = t$, $0{,}5 - x = z$, то уравнение имеет вид $|t| + |z| = t + z$. Полученное равенство выполняется при $t \geq 0$, $z \geq 0$. Значит, все корни нашего уравнения являются решением системы неравенств $\begin{cases}\cos x \geq 0{,}5\\ 0{,}5 - x \geq 0\end{cases}$, откуда $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$,

или $x \in \left[-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, где $n = -1; -2; -3$.

Теперь Вам совсем легко решить уравнение:

$|7^x - 5| + |x^2 - 6x + 5| = 7^x + x^2 - 6x$, которое предлагалось на выпускных экзаменах в 1998 году (АII ФМК, №6-98), и получить ответ $[\log_7 5;\ 1] \cup [5;\ +\infty)$.

Совсем нелегко справиться с уравнением $\left|x - \dfrac{a}{\sqrt{x}} + 2\right| - \left|x - \dfrac{a}{\sqrt{x}}\right| = 2$, если его решать только стандартным способом.

Если $x - \dfrac{a}{\sqrt{x}} + 2 = m$, $x - \dfrac{a}{\sqrt{x}} = n$, то уравнение можно представить в виде $|m| - |n| = |m + n|$ или $|m| = |n| + |m - n|$. После возведения обеих частей последнего равенства в квадрат получим равносильное им неравенство $m^2 = n^2 + 2|n||m - n| + m^2 - 2mn + n^2$; $|n||m - n| = n(m - n)$; $|n(m - n)| = n(m - n)$, $n(m - n) \geq 0$. Исходное уравнение имеет корни, которые являются решением неравенства

$2\left(x - \dfrac{a}{\sqrt{x}}\right) \geq 0;\ x\sqrt{x} - a \geq 0;\ x\sqrt{x} \geq a$ при $x > 0$ $x > \sqrt[3]{a^2}$.

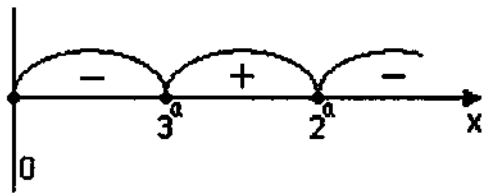
При $a < 0$ решением неравенства будет $x \in (0;\ +\infty)$; при $a > 0$ $x \in \left[\sqrt[3]{a^2};\ +\infty\right)$.

При решении некоторых неравенств также бывает полезно найти зависимость между выражениями, которые его составляют.

Например, пусть требуется решить неравенство:

$|\log_2 x - \log_3 x| < |\log_2 x - a| + |a - \log_3 x|$, где $a < 0$.

Решение. Пусть $\log_2 x - a = m$, $a - \log_3 x = n$, тогда исходное неравенство принимает вид $|m + n| < |m| + |n|$. После возведения в квадрат и выполнения очевидных преобразований получим $mn < |m| \cdot |n|$, последнее неравенство выполнимо при $mn < 0$. Исходное неравенство равносильно неравенству $(\log_2 x - a)(a - \log_3 x) < 0$, поскольку $|\log_2 x - \log_3 x| = |(\log_2 x - a) - (a - \log_3 x)|$.



Ответ: $(3^a; 2^a)$ при $a < 0$.

Решим неравенство $\left|\frac{1}{x} - 1\right| + |x^2 - 4| > \left|3 + \frac{1}{x} - x^2\right|$.

Решение его стандартными приемами приведет к большому количеству систем неравенств, да и найти нули функции $3 + \frac{1}{x} - x^2$ нелегко. Заметим, что если обозначить $a = \frac{1}{x} - 1$, $b = x^2 - 4$, то исходное неравенство принимает вид $|a| + |b| > |a - b|$. Для того, чтобы выяснить, при какой зависимости между а и b это неравенство верно, возведем обе части неравенства в квадрат; при этом получим $|ab| > -ab$, что верно при $ab > 0$. Введение подстановок только облегчает процесс рассуждений, исходное неравенство можно сразу возвести в квадрат и получить тот же самый результат. Данное неравенство равносильно неравенству $\left(\frac{1}{x} - 1\right)(x^2 - 4) > 0$, которое легко решается и дает ответ $(-2; 0) \cup (1; 2)$.

Неожиданные ситуации могут получиться даже при упрощении выражений. Пусть необходимо упростить выражение $\dfrac{|a|-|b|+\sqrt{b(a-b)}}{|b|+\sqrt{b(a-b)}}$.

Из условия следует, что $b(a-b)>0$, но тогда $|a|-|b|=|a-b|$. Выполняем преобразования:

$|a|=|b|+|a-b|$; $a^2=2b^2+a^2+2\,|b(a-b)|-2ab$;

$b(a-b)=|b(a-b)|$, а последнее равенство выполняется при $b(a-b)\geq 0$.

Значит, $|a|-|b|=|a-b|$, и поэтому

$$\frac{|a|-|b|+\sqrt{b(a-b)}}{|b|+\sqrt{b(a-b)}}=\frac{|a-b|+\sqrt{b(a-b)}}{|b|+\sqrt{b(a-b)}}=\frac{\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{b(a-b)}}{\sqrt{b^2}+\sqrt{|b|}\sqrt{|a-b|}}=$$

$$=\frac{\sqrt{|a-b|}(\sqrt{|a-b|}+\sqrt{|b|})}{\sqrt{|b|}(\sqrt{|b|}+\sqrt{|a-b|})}=\sqrt{\left|\frac{a-b}{b}\right|}.$$

Предлагаем самостоятельно найти зависимость между x и y в следующих равенствах:

1. $|x-y|=|x|-|y|$;
2. $|x+y|=|x|-|y|$;
3. $|x|-|y|=x-y$.

Ответы:

1. $|x|\geq|y|$; $xy\geq 0$;
2. $|x|\geq|y|$; $xy\leq 0$;
3. $x\geq 0$; $y\geq 0$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»

Учебно-методические материалы по математике

Севрюков Павел Федорович
Смоляков Александр Николаевич

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ И МЕТОДИКА ИХ РЕШЕНИЯ

Редактор *И. Н. Олейникова*
Техническое редактирование и компьютерная верстка *Н. И. Чигиной*

Подписано в печать 01.08.2005. Формат 60x84[1]/[16]. Гарнитура «Times».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,51. Тираж 5000 экз. Заказ № 1198

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.

ИД №03253 код 221 от 15.11.2000 г.
Издательство «Илекса». Москва, Измайловское шоссе, 48а.

Лицензия №40515 от 14.01.1998 г.
Редакция «Народное образование». 109144, Москва, а/я 48.

Издательская лицензия ЛР №065840 от 23.04.1998 г.
Издательство «Сервисшкола»,
355042, г. Ставрополь, ул. 50 лет ВЛКСМ, 38.

Отпечатано с готового оригинал-макета в ОАО «ИПФ «Ставрополье»
355106, г. Ставрополь, ул. Спартака, 8.

Индекс 81352

П. Ф. Севрюков
А. Н. Смоляков

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ И МЕТОДИКА ИХ РЕШЕНИЯ

В пособии рассматривается теоретический материал, разбирается достаточное количество примеров, предлагаются упражнения для самостоятельной работы, приводятся оригинальные способы решений отдельных уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. Ко всем упражнениям даются ответы, наиболее сложные задания сопровождаются решениями.

Отдельные части материала публиковались в журнале «Математика в школе» и приложении «Математика» к газете «Первое сентября».

Настоящее пособие предназначено для тех, кто готовится к вступительным экзаменам в вузы по математике. Оно призвано помочь школьнику и абитуриенту в изучении темы «Модули», которой в школе не уделяется достаточного внимания. Материал пособия будет полезен и учителям при подготовке к проведению факультативных занятий.

ISBN 593078325-X
9 785930 783253